

PERIODICA POLYTECHNICA

ELECTRICAL ENGINEERING — ELEKTROTECHNIK

VOL. 4 * No. 4 * 1960



POLYTECHNICAL UNIVERSITY
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BUDAPEST
HUNGARY — UNGARN

PERIODICA POLYTECHNICA

Contributions to international technical sciences published by the Polytechnical University, Budapest (Hungary)

Originalbeiträge zur internationalen technischen Wissenschaft, veröffentlicht von der Technischen Universität, Budapest (Ungarn)

PERIODICA POLYTECHNICA

includes the following series

Engineering
Electrical Engineering
including Applied Physics
Chemical Engineering

The issues of each series appear at quarterly intervals

enthält folgende Serien

Maschinen- und Bauwesen
Elektrotechnik und angewandte Physik
Chemisches Ingenieurwesen

Einzelnummern der genannten Serien erscheinen vierteljährlich

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD — HAUPTSCHRIFTLEITER

Z. CSÜRÖS

EDITORIAL BOARD — SCHRIFTLEITUNG

**N. BÁRÁNY, O. BENEDIKT, S. BORBÉLY, T. ELEK, L. ERDEY, J. GRUBER,
I. KOVÁCS, L. KOZMA, G. SCHAY, K. TETTAMANTI**

EXECUTIVE EDITOR — SCHRIFTLEITER

J. KLÁR

The rate of subscription to a series is \$ 4,00 a year. For subscription or exchange copies please write to

Jahresabonnement pro Serie: \$ 4,00. Bestellungen und Anträge für Tauschverbindungen sind zu richten an:

PERIODICA POLYTECHNICA

BUDAPEST 62, POB 440

QUADRATIC APPROXIMATION OF ADMITTANCE DIAGRAMS FOR THE THEORETICAL EXAMINATION OF TURBO-GENERATORS IN ASYNCHRONOUS OPERATION

By

F. CSÁKI

Department of Special Electric Machines and Automation,
Polytechnical University, Budapest

(Received April 19, 1960)

As has been seen in the chapters of the previous two parts [1, 2] approximating each of the direct-axis and quadrature-axis admittance diagrams by one straight line, or some straight sections, from the condition $g = \text{const.}$ the relation $s(\delta)$ may be determined and its reciprocal function integrated. After having discussed the linear approximation in details, the present third part is devoted to the examination of the quadratic approximation.

6. The primitive parabolic approximation

Instead of the more general case of the conductance and also the susceptance being a general quadratic expression of the slip — as the relations are very complicated — the following discussion starts from the most simple parabolic approximation, when the conductance consists of a term merely containing the first power of the slip, while the susceptance is composed of two members containing only the zero and second power of the slip. (This approximation is suggested, however, by expression (2—33) of the admittances [1], too. Decomposing, namely, each admittance to a real and an imaginary part and expanding both components in series with respect to the *small* slips, it may be observed that the real part contains the 1st, 3rd, 5th, etc., while the imaginary one the 0, 2nd, 4th, etc. powers of the slip.) The above-mentioned approximation will be called in the following primitive parabolic approximation.

6.1. Slip-angle relation in case of a primitive parabolic approximation

If the direct-axis and quadrature-axis admittance diagrams, respectively, are approximated by a primitive parabola, then

$$\bar{y}_q = s g_{q1} - j(b_{q0} + s^2 b_{q2}) \quad (6-1)$$

$$\bar{y}_d = s g_{d1} - j(b_{d0} + s^2 b_{d2}).$$

Consequently, each parabola is symmetric with respect to the negative imaginary axis. Now

$$\begin{aligned} g_q(s) &= s g_{q1} & b_q(s) &= b_{q0} + s^2 b_{q2} \\ g_d(s) &= s g_{d1} & b_d(s) &= b_{d0} + s^2 b_{d2}. \end{aligned} \quad (6-2)$$

Substituting the relations (6-2) into the fundamental equation (3-1) (see [1]):

$$g = s g_{S1} + s g_{D1} \cos 2\delta - b_{D0} \sin 2\delta - s^2 b_{D2} \sin 2\delta, \quad (6-3)$$

where

$$\begin{aligned} g_{S1} &= \frac{1}{2} (g_{q1} + g_{d1}) & g_{D1} &= \frac{1}{2} (g_{q1} - g_{d1}) \\ b_{D0} &= \frac{1}{2} (b_{q0} - b_{d0}) & b_{D2} &= \frac{1}{2} (b_{q2} - b_{d2}). \end{aligned}$$

Reducing the relation (6-3) to zero, the following two equations may be obtained for the slip and its reciprocal, respectively:

$$s^2 b_{D2} \sin 2\delta - s (g_{S1} + g_{D1} \cos 2\delta) + (g + b_{D0} \sin 2\delta) = 0 \quad (6-4)$$

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2 (g + b_{D0} \sin 2\delta) - \left(\frac{1}{s}\right) (g_{S1} + g_{D1} \cos 2\delta) + b_{D2} \sin 2\delta = 0. \quad (6-5)$$

Solving the two quadratic equations (6-4) and (6-5), we obtain the slip-angle relation and its reciprocal, respectively.

To simplify the calculations, that is, to reduce the number of the figuring parameters, introduction of some relative quantities is again advisable. Starting from Fig. 6-1, for the circumstances outlined there

$$g_{S1} > 0; \quad b_{D0} > 0; \quad g_{D1} < 0; \quad b_{D2} < 0 \quad (6-6)$$

further, in asynchronous generator operation

$$g < 0.$$

Let it be again

$$-\frac{b_{D0}}{g} = \beta_0; \quad -\frac{g_{D1}}{g_{S1}} = \kappa_1; \quad \frac{g}{g_{S1}} = s_0, \quad (6-7)$$

where (for the case of Fig. 6-1) $\beta_0 > 0$, $\kappa_1 > 0$, while $s_0 < 0$.

Let it further be

$$-\frac{b_{D2}}{g_{S1}} = \lambda_2, \quad (6-8)$$

where (for the case of Fig. 6-1) $\lambda_2 > 0$.

By the aid of the relative quantities introduced here, the quadratic equations (6-4) and (6-5), respectively, may assume the following form:

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 (-\lambda_2 s_0) \sin 2\delta - \left(\frac{s}{s_0}\right) (1 - \kappa_1 \cos 2\delta) + (1 - \beta_0 \sin 2\delta) = 0 \quad (6-9)$$

and

$$\left(\frac{s_0}{s}\right)^2 (1 - \beta_0 \sin 2\delta) - \left(\frac{s_0}{s}\right) (1 - \kappa_1 \cos 2\delta) - \lambda_2 s_0 \sin 2\delta = 0. \quad (6-10)$$

Solution of the quadratic equation (6-10) yields

$$\frac{s_0}{s(\delta)} = \frac{1}{2} \frac{1 - \kappa_1 \cos 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{1 - \kappa_1 \cos 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta}\right)^2 + \frac{\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta}}. \quad (6-11)$$

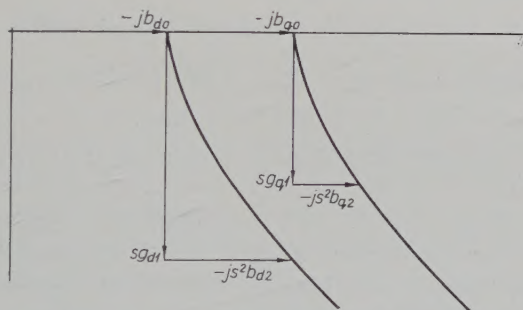


Fig. 6-1

It must be noted that in the solution (6-11) the square root may be taken only with positive sign, as with substitution of $\lim \lambda_2 = 0$ the relation (4-26), valid for the primitive linear approximation must be regained.

Similarly, solution of the quadratic equation (6-9) is:

$$\frac{s(\delta)}{s_0} = \frac{1 - \kappa_1 \cos 2\delta}{-2\lambda_2 s_0 \sin 2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \kappa_1 \cos 2\delta}{-2\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}\right)^2 - \frac{1 - \beta_0 \sin 2\delta}{-\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}}. \quad (6-12)$$

In order (6-12) should correctly express the reciprocal of (6-11), in the former the square root must be taken alternately with \pm sign, according to

$$\frac{1 - \beta_0 \sin 2\delta}{-\lambda_2 s_0 \sin 2\delta} \geq 0.$$

The sign problems can be avoided, if the slip is calculated from the reciprocal of (6-11) as follows:

$$\frac{s(\delta)}{s_0} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_1 \cos 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_1 \cos 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta}\right)^2 - \frac{\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta}}} \quad (6-13)$$

It must be noted, that all of the expressions (6-11) ... (6-13) are valid if, and only if the inequality

$$(1 - \alpha_1 \cos 2\delta)^2 \geq 4(1 - \beta_0 \sin 2\delta) (-\lambda_2 s_0) \sin 2\delta \quad (6-14)$$

is valid, as physically only the real slip has a meaning. On the other hand, always $s/s_0 > 0$, as if $s \geq 0$, then $s_0 \geq 0$.

From the afore-said it becomes clear, that the first step of the method suggested in *chapter 3* of [1] may be realized, that is, the slip and its reciprocal respectively, may be expressed as an explicit function of the angle.

6.2. Determination of the time-angle relation

To find the time-angle function, as the second step of the method suggested, the expression (6-11) should be integrated with respect to the angle. As in the expression in question only the trigonometric functions of the double angle 2δ figure, instead of the full rotation 2π it is sufficient to restrict ourselves to the half-rotation π and to integrate only within the range $-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2$. Choosing the initial value $\delta = -\pi/2$ means, that at the initial moment $t = 0$, the voltage vector leads by 90° with respect to its synchronous no-load position determined by the quadrature axis q , i. e., the quadrature axis q and the flux-linkage vector coincide with each other, while the direct-axis d lags by 90° with respect to the revolving field.

The integral of expression (6-11) may be divided into two parts:

$$-s_0 \omega_0 t = I_1 + I_2, \quad (6-15)$$

where the first is an elementary integral

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\delta} \frac{1 - \alpha_1 \cos 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta} d\delta$$

solution of which e. g. according to Eq. (4-17) from Eq. (4-28) (see [2]):

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left\{ \arctg \left[\sqrt{\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}} \operatorname{tg} \left(\delta - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \arctg \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\kappa_1}{2\beta_0} \ln(1 - \beta_0 \sin 2\delta). \quad (6-16)$$

The second integral

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\delta} \frac{\sqrt{(1 - \kappa_1 \cos 2\delta)^2 + 4\lambda_2 s_0 \sin 2\delta (1 - \beta_0 \sin 2\delta)}}{1 - \beta_0 \sin 2\delta} d\delta \quad (6-17)$$

cannot be expressed by elementary functions, being, however, an elliptic integral. For the evaluation, the integral I_2 in question must be expressed by the basic elliptic integrals of first, second and third kind,

$$F(\varphi, k), \quad E(\varphi, k) \quad \text{and} \quad \Pi(\varphi, a^2, k)$$

as for the evaluation of the latter ones tables and manuals are available (e.g. [3]).

For this purpose, first of all the root expression must be brought to the denominator:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\delta} \frac{4\lambda_2 s_0 \sin 2\delta + \frac{1 - 2\kappa_1 \cos 2\delta + \kappa_1^2 \cos^2 2\delta}{1 - \beta_0 \sin 2\delta}}{\sqrt{1 - 2\kappa_1 \cos 2\delta + \kappa_1^2 \cos^2 2\delta + 4\lambda_2 s_0 \sin 2\delta - 4\lambda_2 s_0 \beta_0 \sin^2 2\delta}} d\delta. \quad (6-18)$$

Then by the well-known substitution $x = \operatorname{tg} \delta$, $\delta = \arctg x$ applying relations

$$\sin 2\delta = \frac{2x}{1 + x^2}; \quad \cos 2\delta = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \quad d\delta = \frac{dx}{1 + x^2}$$

the respective integral may assume the following form

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\delta} \frac{\frac{8\lambda_2 s_0 x}{x^2 + 1} + \frac{(1 + \kappa_1)^2 \left(x^2 + \frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1}\right)^2}{(x^2 - 2\beta_0 x + 1)(x^2 + 1)}}{\sqrt{(1 + \kappa_1)^2 x^4 + 8\lambda_2 s_0 x^3 + 2(1 - \kappa_1^2 - 8\lambda_2 s_0 \beta_0) x^2 + 8\lambda_2 s_0 x + (1 - \kappa_1)^2}} dx. \quad (6-19)$$

Let us factorize the coefficient belonging to the term of the highest degree in the denominator, divide with its root the numerator, then let us expand the numerator into partial fractions! After all the integral may be written as follows:

$$I_2 = \int_{-\infty}^y \frac{\operatorname{Re} \left\{ N_0 + \frac{N_j}{x - j} + \frac{\bar{N}_n}{x - \bar{n}} \right\}}{\sqrt{P(x)}} dx, \quad (6-20)$$

where

$$N_0 = \frac{1 + \kappa_1}{2} \quad (6-21)$$

$$N_j = \frac{1}{1 + \kappa_1} \left(4\lambda_2 s_0 + \frac{\kappa_1^2}{\beta_0} \right) \quad (6-22)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_n &= \frac{1 + \kappa_1}{2} \frac{\left[(\beta_0 + j\sqrt{1 - \beta_0^2})^2 + \frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \right]^2}{j\sqrt{1 - \beta_0^2} [(\beta_0 + j\sqrt{1 - \beta_0^2})^2 + 1]} = \\ &= (1 + \kappa_1) \frac{\left[\beta_0 (\beta_0 + j\sqrt{1 - \beta_0^2})^2 - \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1} \right]^2}{j\beta_0 \sqrt{1 - \beta_0^2} (\beta_0 + j\sqrt{1 - \beta_0^2})} \end{aligned} \quad (6-23)$$

and

$$n = \beta_0 + j\sqrt{1 - \beta_0^2} \quad (6-24)$$

finally

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + \frac{8\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} x^3 + 2 \frac{1 - \kappa_1^2 - 8\lambda_2 s_0 \beta_0}{(1 + \kappa_1)^2} x^2 + \\ &+ \frac{8\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} x + \left(\frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (6-25)$$

From condition (6-14) substituting $x = \operatorname{tg} \delta$ it follows that $P(x) \geq 0$.

The equation $P(x) = 0$ of fourth degree has four different roots and these may form only *two conjugate complex pairs of roots*. (Otherwise there existed two, or four different real roots, consequently, in the interval

$$-\infty < x < +\infty$$

the function $P(x)$ became zero for two, or four real values of x and $P(x)$ changed sign in the vicinity of these points. Accordingly, in certain intervals determined by the roots, the condition $P(x) < 0$ would prevail, engendering a contradiction to condition $P(x) \geq 0$ and besides $\sqrt{P(x)}$ would become imaginary.)

It must be noted the roots not being too far from the values given by the following expression

$$\begin{aligned} x_{1,2,3,4} &= \frac{-2\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} \right)^2 + \frac{4\lambda_2 s_0 \beta_0}{(1 + \kappa_1)^2}} \pm \\ &\pm j \sqrt{\left(\frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \right) - \left(\frac{-2\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2} \right)^2 + \frac{4\lambda_2 s_0 \beta_0}{(1 + \kappa_1)^2}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (6-26)$$

Namely, the equation of fourth degree, the roots of which are expressions (6-26), has the same coefficients as Eq. (6-25), merely instead of

$$\frac{8\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2}$$

the coefficient belonging to the term of first degree is

$$\frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \frac{8\lambda_2 s_0}{(1 + \kappa_1)^2}.$$

6.3. Evaluation of the elliptic integral

To evaluate the elliptic integral (6-20), let the two complex pairs of roots be

$$\bar{a} = a_r + j a_j \quad \hat{a} = a_r - j a_j$$

and

$$\bar{c} = c_r + j c_j \quad \hat{c} = c_r - j c_j.$$

Evidently,

$$P(x) = (x - \bar{a})(x - \hat{a})(x - \bar{c})(x - \hat{c}) = [(x - a_r)^2 + a_j^2][(x - c_r)^2 + c_j^2]. \quad (6-28)$$

Following [3], but with some other notations, let us further denote

$$A^2 = (a_r - c_r)^2 + (a_j + c_j)^2$$

$$B^2 = (a_r - c_r)^2 + (a_j - c_j)^2 \quad (6-29)$$

$$k^2 = \frac{4AB}{(A+B)^2} \quad (6-30)$$

$$\gamma = \frac{2}{A+B} \quad (6-31)$$

$$\alpha^2 = \frac{4a_j^2 - (A-B)^2}{(A+B)^2 - 4a_j^2}. \quad (6-32)$$

Let us introduce a new variable:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{x - a_r + a_j a}{-a x + a_r a + a_j}, \quad (6-33)$$

i. e.

$$x = \frac{a_r - a_j a + (a_r a + a_j) \operatorname{tg} \vartheta}{1 + a \operatorname{tg} \vartheta} \quad (6-34)$$

and so the new limit of integration is:

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - a_r + a_j a}{-a y + a_r a + a_j}. \quad (6-35)$$

Some coherent values of the limits of integration are

$$\begin{aligned}
 y = -\infty & \quad \varphi_{-\infty} = \arctg \frac{1}{-a} \\
 y = 0 & \quad \varphi_0 = \arctg \frac{-a_r + a_j a}{a_r a + a_j} \\
 y = y_0 = a_r - a_j a & \quad \varphi = 0 \\
 y = y_R = \frac{a_r a + a_j}{a} & \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \\
 y = +\infty & \quad \varphi = \varphi_{-\infty} + \pi.
 \end{aligned} \tag{6-36}$$

On the basis of the above relations (6-27)...(6-36), it may first of all be shown [3] that

$$\int_{y_0}^y \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \gamma \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = \gamma F(\varphi, k) \tag{6-37}$$

i. e. the latter integral may be reduced to the basic elliptic integral of first kind $F(\varphi, k)$.

Secondly it may be proved [3, 4] that

$$\begin{aligned}
 & \int_{y_0}^y \frac{dx}{(x-n)\sqrt{P(x)}} = \\
 & = \frac{\gamma}{y_0 - n} \left[\int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} + \frac{a_n - a}{a} \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 + a_n \operatorname{tg} \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \right] = \\
 & = \frac{\gamma}{y_0 - n} \frac{1 + a a_n}{1 + a_n^2} \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} + \\
 & + \frac{\gamma}{y_0 - n} a_n \frac{a_n - a}{1 + a_n^2} \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{[1 + (1 + a_n^2) \sin^2 \vartheta] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} - \\
 & - \frac{\gamma}{y_0 - n} (a_n - a) \int_0^\varphi \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{[1 - (1 + a_n^2) \sin^2 \vartheta] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta,
 \end{aligned} \tag{6-38}$$

where

$$a_n = \frac{a_r a + a_j - a n}{a_r - a_j a - n} = a \frac{y_R - n}{y_0 - n}. \tag{6-38'}$$

The integral figuring in the last term of Eq. (6-38) may be expressed in a closed form by the elementary function:

$$f(\varphi, 1 + a_n^2, k) = - \int_0^\varphi \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{[1 - (1 + a_n^2) \sin^2 \vartheta] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta =$$

$$(6-39)$$

$$= - \frac{1}{2 \sqrt{(1 + a_n^2)(k'^2 + a_n^2)}} \ln \frac{\frac{\sqrt{1 + a_n^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{k'^2 + a_n^2}}{\sqrt{1 + a_n^2}} + \sqrt{k'^2 + a_n^2}}{\frac{\sqrt{1 + a_n^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{k'^2 + a_n^2}}{\sqrt{1 + a_n^2}}},$$

where $k' = \sqrt{1 - k^2}$ is the so-called complementary modulus.

Again considering the definitions of the basic elliptic integrals, as well as relation (6-39), the integral (6-38) may be reduced according to

$$\int_{y_0}^y \frac{dx}{(x - n) \sqrt{P(x)}} = \frac{\gamma}{y_0 - n} \frac{1 + a_n}{1 + a_n^2} F(\varphi, k) +$$

$$(6-40)$$

$$+ \frac{\gamma}{y_0 - n} a_n \frac{a_n - a}{1 + a_n^2} \Pi(\varphi, 1 + a_n^2, k) + \frac{\gamma}{y_0 - n} (a_n - a) f(\varphi, 1 + a_n^2, k)$$

onto the basic elliptic integrals of first and third kind,

$$F(\varphi, k) \text{ and } \Pi(\varphi, (\sqrt{1 + a_n^2})^2, k).$$

Knowing integrals (6-37) and (6-40), establishment of the primitive function of integral (6-20) involves no difficulty (the limits of integration, however, are not yet substituted):

$$(I_2) = \text{Re} \left\{ \left(N_0 + \frac{N_j}{y_0 - j} \frac{1 + a \bar{a}_j}{1 + \bar{a}_j^2} + \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} \frac{1 + a \bar{a}_n^2}{1 + \bar{a}_n^2} \right) \gamma F(\varphi, k) + \right.$$

$$+ \frac{N_j}{y_0 - j} \bar{a}_j \frac{\bar{a}_j - a}{1 + \bar{a}_j^2} \gamma \bar{\Pi}(\varphi, 1 + \bar{a}_j^2, k) + \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} \bar{a}_n \frac{\bar{a}_n - a}{1 + \bar{a}_n^2} \gamma \bar{\Pi}(\varphi, 1 + \bar{a}_n^2, k) +$$

$$\left. + \frac{N_j}{y_0 - j} (\bar{a}_j - a) \gamma \bar{f}(\varphi, 1 + \bar{a}_j^2, k) + \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} (\bar{a}_n - a) \gamma \bar{f}(\varphi, 1 + \bar{a}_n^2, k) \right\}, \quad (6-41)$$

where

$$\bar{a}_j = (a_n)_{n=j} \quad \bar{a}_n = (a_n)_{n=\bar{n}}$$

consequently, in Eq. (6-38') $n = j$ and $n = \bar{n}$, respectively, are to be substituted.

Finally, substituting the limits of integration (6-36), the desired solution is:

$$\begin{aligned}
 I_2 = \operatorname{Re} \{ & \bar{M}_F [F(\varphi, k) - F(\varphi_{-\infty}, k)] + \\
 & + \bar{M}_{IIj} [\bar{\Pi}(\varphi, 1 + \bar{a}_j^2, k) - \bar{\Pi}(\varphi_{-\infty}, 1 + \bar{a}_j^2, k)] + \\
 & + \bar{M}_{IIn} [\bar{\Pi}(\varphi, 1 + \bar{a}_n^2, k) - \bar{\Pi}(\varphi_{-\infty}, 1 + \bar{a}_n^2, k)] + \\
 & + \bar{M}_{fj} [\bar{f}(\varphi, 1 + \bar{a}_j^2, k) - \bar{f}(\varphi_{-\infty}, 1 + \bar{a}_j^2, k)] + \\
 & + \bar{M}_{fn} [\bar{f}(\varphi, 1 + \bar{a}_n^2, k) - \bar{f}(\varphi_{-\infty}, 1 + \bar{a}_n^2, k)] \}, \quad (6-42)
 \end{aligned}$$

where the values of the complex coefficients are:

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_F &= \left(N_0 + \frac{N_j}{y_0 - j} \frac{1 + a \bar{a}_j}{1 + \bar{a}_j^2} + \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} \frac{1 + a \bar{a}_n}{1 + \bar{a}_n^2} \right) \gamma \\
 \bar{M}_{IIj} &= \frac{N_j}{y_0 - j} \bar{a}_j \frac{\bar{a}_j - a}{1 + \bar{a}_j^2} \gamma \\
 \bar{M}_{IIn} &= \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} \bar{a}_n \frac{\bar{a}_n - a}{1 + \bar{a}_n^2} \gamma \\
 \bar{M}_{fj} &= \frac{N_j}{y_0 - j} (\bar{a}_j - a) \gamma \\
 \bar{M}_{fn} &= \frac{\bar{N}_n}{y_0 - \bar{n}} (\bar{a}_n - a) \gamma.
 \end{aligned}$$

6.4. Some remarks concerning determination of the time-angle function

In knowledge of relations (6-42) and (6-16) the desired time-angle function (6-15) may now be calculated.

The most expedient solution is to choose round figures for φ and to calculate the integral I_2 for these values. Then considering Eq. (6-34) and $\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, on the basis of relation

$$\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_r - a_j a + (a_j + a_r a) \operatorname{tg} \varphi}{1 + a \operatorname{tg} \varphi}$$

for the chosen values φ the angle δ may be determined. By the aid of the latter, the integral I_1 may be calculated. Finally, the values of I_2 and I_1 in this way evaluated are to be summarized.

While φ is changing within the limits $\varphi_{-\infty}$ and $\varphi_{-\infty} + \pi = \varphi_{+\infty}$ (i. e. y is within the limits $-\infty$ and $+\infty$) δ is changing within the limits $-\pi/2$ and $+\pi/2$.

To evaluate the incomplete basic elliptic integrals of first and second kind, in the range of $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ tables are available (e. g. [3, 5]).

Determination of the incomplete elliptic integral of third kind is somewhat more complicated. For its evaluation, besides the elementary functions, the tabulated *Heuman's Lambda* functions $\Lambda_0(\varphi, k)$ and the tabulated function $KZ(\varphi, k)$ — i. e. the K -times value of *Jacobi's Zeta* function, where K is the complete elliptic integral of first kind — also *Theta* functions are needed, necessitating an evaluation by infinite series.

In the mathematical books (e. g. [3]) formulas are available for reducing the functions $\Pi(\varphi, \bar{a}^2, k)$ with *complex parameters* and the expressions

$$\operatorname{Re} \bar{M} \bar{\Pi}(\varphi, \bar{a}^2, k) = \frac{1}{2} \bar{M} \bar{\Pi}(\varphi, \bar{a}^2, k) + \frac{1}{2} \hat{M} \hat{\Pi}(\varphi, \hat{a}^2, k)$$

respectively, to elliptic integrals of third kind with *real parameters*.

Evaluation of the elementary functions with complex parameters theoretically involves no difficulties.

As demonstrated in the afore-said, the time-angle function may be expressed in a not too complicated form by elliptic and elementary functions. Nevertheless, numerical evaluation is a quite lengthy and troublesome procedure.

Naturally, in possession of the time-angle function, determination of the slip-time, current-time, apparent power-time, reactive power-time, etc. functions may be effected according to the procedure already known [1].

6.5. Determination of the period

Choosing the value $\delta = \pi/2$ for the upper limit of integral I_1 , the value $\varphi = -\pi/2$ ($y = y_R - \pi$; $\delta = \delta_R - \pi$) for the lower limit of integral I_2 and for its upper limit the value $\varphi = +\pi/2$ ($y = y_R$; $\delta = \delta_R$), finally, multiplying both integrals by 2, for the whole period the following relation may be obtained:

$$-s_0 \omega_0 T = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \quad (6-43)$$

$$+ 4 \operatorname{Re} \left\{ \bar{M}_F K + \bar{M}_{Ij} \bar{\Pi} \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \bar{a}_j^2, k \right) + \bar{M}_{In} \bar{\Pi} \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \bar{a}_n^2, k \right) + \right. \\ \left. + \bar{M}_{Fj} f \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \bar{a}_j^2, k \right) + \bar{M}_{fn} f \left(\frac{\pi}{2}, 1 + \bar{a}_n^2, k \right) \right\},$$

where K is the complete elliptic integral of first kind: $K = F \left(\frac{\pi}{2}, k \right)$.

6.6. Special cases. The possibility of generalization.

The primitive parabolic approximation may have seven special cases, when among the three parameters β_0 , λ_1 , λ_2 one, or more, become zero. These possibilities are illustrated in Fig. 6—2. In all cases the direct-axis admittance diagram \bar{y}_d is the same (curve *a*), and only the quadrature-axis admittance diagram \bar{y}_q is changed. The points belonging to identical slips are marked by crosses on the respective curves and some of them are also linked by a thin line for the sake of a better illustration. It must be noted, that in Fig. 6—2 all para-

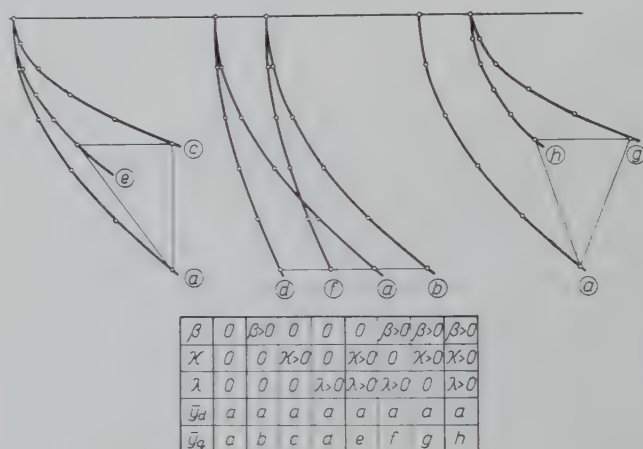


Fig. 6—2

eters are positive, or zero. (Naturally, some parameters may be negative too, and also in this case suitable curves may be plotted, these, however, are not discussed here.)

The respective special cases are as follows:

a) All of three parameters are zero. The curves \bar{y}_d and \bar{y}_q are coincident (the rotor is symmetric), to the different torques different slips, but constant slips are belonging. Function $s(\delta)$ is now again given by (4—5), while function $t(\delta)$ by Eqs. (4—6) and (4—7), respectively.

b) Solely $\beta \neq 0$ (while the other two parameters equal zero). Curves \bar{y}_d and \bar{y}_q are running parallelly. Though both curves are parabolas, the function $s(\delta)$ and $t(\delta)$ may now again be calculated by formula (4—22).

c) Exclusively $\lambda_1 \neq 0$. The abscissae of the points belonging to the same slip at the two admittance curves are of the same magnitude. For calculating functions $s(\delta)$ and $t(\delta)$ now again formulae (4—11) and (4—13), respectively, may be adopted.

d) Only $\lambda_2 \neq 0$. On curves y_d and y_q the ordinates of the points belonging to the same slip are of the same value. Now formula (6-11) becomes considerably more simple

$$\frac{s_0}{s(\delta)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}. \quad (6-44)$$

$$(1 > |4\lambda_2 s_0|).$$

As $\cos 2\delta$ is not present, but only $\sin 2\delta$ is figuring, the slip curve

$$\frac{s(\delta)}{s_0} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\lambda_2 s_0 \sin 2\delta}} \quad (6-45)$$

may be divided into four sections during a complete relative rotor rotation, while angle δ changes in the range 2π . The duration of each section equals $\pi/2$. In the odd sections the slip curves are of the same course, similarly the even sections are also congruent, while in any section the course of the slip is axially symmetrical with respect to the slip curve of the contiguous section, that is, each of the two adjacent sections may be regarded as reflected images.

By the proper choice of the integration interval, the calculation of integral I_2 necessary for determining the time-angle function becomes considerably more simple. If e. g. $\lambda_2 > 0$ (and $s_0 < 0$), then the most practicable solution is to integrate the reciprocal slip function $-1/s(\delta)$ in the domain $-\pi/4 < \delta \leq \pi/4$:

$$I'_2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\delta} \sqrt{1 - (-4\lambda_2 s_0) \sin 2\delta} \, d\delta. \quad (6-46)$$

The latter integral is again an elliptic one. To calculate it, the following substitution is realized:

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{1 + \sin 2\delta}{2}}; \quad \delta = \frac{1}{2} \arcsin (2 \sin^2 \vartheta - 1); \quad d\delta = d\vartheta.$$

Thereby

$$I'_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - 4\lambda_2 s_0 - (-8\lambda_2 s_0) \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta$$

that is

$$I'_2 = M_E \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta = M_E E(\vartheta, k), \quad (6-47)$$

where

$$M_E = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\lambda_2 s_0} > \frac{1}{2}$$

$$k^2 = \frac{-8\lambda_2 s_0}{1 - 4\lambda_2 s_0} < 1.$$

Consequently, the integral I'_2 may be expressed by the basic elliptic integral of second kind. As at the same time

$$I'_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\delta} d\delta = \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (6-48)$$

thus:

$$-s_0 \omega_0 t = \frac{1}{2} \left(\delta(\varphi) + \frac{\pi}{4} \right) + M_E E(\varphi, k) \quad (6-49)$$

where $\delta(\varphi)$ denotes, that for values φ adopted in the course of the evaluation the values of δ must be calculated by the following formula:

$$\delta = \frac{1}{2} \arcsin(2 \sin^2 \varphi - 1).$$

The relation (6-49) provides the function $t(\delta)$ merely for $-\pi/4 < \delta \leq \pi/4$ i. e. in an interval of magnitude $\pi/2$, yet we need it, at least in an interval of magnitude π . Instead of further calculations, it is sufficient to consider only the enumerated symmetry conditions, as on the basis of these, e. g. in the interval $-3\pi/4 < \delta \leq -\pi/4$, curve $t(\delta)$ has to be with respect to point $t(-\pi/4) = 0$ in center symmetry, as compared with the curve given by formula (6-49).

For calculating the period of the complete rotation ($\delta = 2\pi$), in the right side of Eq. (6-49) the value $\varphi = \pi/2$ has to be substituted, then multiplying by 4, results:

$$\omega_0 T = - \frac{\pi + 4 M_E E}{s_0}. \quad (6-50)$$

This case is worthy of special attention, because it may be regarded as the most simple parabolic approximation. The quadratic approximation leads accordingly, even in its most simple form to an elliptic integral, whose evaluation is, however, now very easy.

Finally, if $\lambda_2 < 0$ (i. e. curve y_q is more deflected than curve y_d) the most simple solution is to integrate between the limits $\pi/4 < \delta \leq 3\pi/4$. With substitution of $\delta' = \delta - \pi/2$ this case may be reduced to case $\lambda_2 > 0$ and for the evaluation of the elliptic integral the above formulas (6-46) ... (6-49) may

directly be adopted, merely writing instead of $-4 \lambda_2 s_0 > 0$ the value $4 \lambda_2 s_0 > 0$ everywhere.

e) Solely $\beta_0 = 0$, while $\kappa_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. The curves \bar{y}_d and \bar{y}_q start from a common point, but the ordinates, as well as the abscissae of the points belonging to the same slip, are different. This case does not involve a considerable simplification with respect to $\beta_0 \neq 0$. Since the numerator of integral I_2 is now

$$\operatorname{Re} \left\{ N_0 + \frac{N_{1j}}{x-j} + \frac{N_{2j}}{(x-j)^2} \right\}$$

not only the integrals

$$\int_{y_0}^y \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \quad \text{and} \quad \int_{y_0}^y \frac{dx}{(x-j)\sqrt{P(x)}}$$

but also the integral of form

$$\int_{y_0}^y \frac{dx}{(x-j)^2 \sqrt{P(x)}}$$

must be evaluated. Consequently, this case is even more complicated. In addition to the basic elliptic integrals of first and third kind, now also the integral of second kind plays a part. (Not speaking of the two elementary functions.)

f) Exclusively $\kappa_1 = 0$, while $\beta_0 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Curves \bar{y}_q and \bar{y}_d start from different points, the ordinates of the points belonging to the same slip are of the same magnitude. At that time only $\sin 2\delta$ figures in the formula of the slip ($\cos 2\delta$ is absent), therefore similarly to case d) it is sufficient also now to restrict ourselves to the integration interval $-\pi/4 < \delta \leq \pi/4$ and substitute $x = \sin 2\delta$. In the integral I_2 besides an elementary function only the basic elliptic integrals of first and third kind are figuring.

If $-\lambda_2 s_0 = \beta_0$ and $\kappa_1 = 0$ then from formula (6-11) $s = s_0$, that is, the slip is constant. This occurs if the straight line $g = \text{const.}$ passes through the point of intersection of the two curves \bar{y}_d and \bar{y}_q .

g) Merely $\lambda_2 = 0$, while $\beta_0 \neq 0$ and $\kappa_1 \neq 0$. The difference between the abscissas of the suitable points lying on curves \bar{y}_d and \bar{y}_q is always equal. At such times function $s(\delta)$ may be determined through formula (4-26), while function $t(\delta)$ from relation (4-27), or (4-28). Consequently, the general formulas of the primitive linear approximation may directly be adopted for calculating the primitive parabolic approximation of this type.

h) In the most general case of the primitive parabolic approximation, when none of the three parameters equals zero, for calculating the slip-angle function $s(\delta)$ formula (6-13), while for determining the time-angle function $t(\delta)$ formulas (6-15), (6-16) and (6-42) are to be applied.

It is worth-while mentioning here, that instead of the primitive parabolic approximation also a more general quadratic approximation may be adopted. In the most general case both $g(s)$ and $b(s)$ are general quadratic expressions. The condition $g = \text{const.}$ now also leads to an equation of second degree in s . Accordingly, $s(\delta)$ may be expressed in an explicite form. When integrating its reciprocal function, merely elliptic integrals are again needed for the evaluation.

Summary

Adjoining the two preceding articles [1, 2], the present paper gives a survey of the results obtained by substituting each of the direct-axis and quadrature-axis admittance diagrams by single parabolas, that is, through quadratic approximation, in order to examine the asynchronous operation of turbogenerators and to determine the slip varying with the time.

As regards the method previously suggested, the slip-time function may be expressed in an explicite form and its reciprocal function may be integrated in a closed form now also, nevertheless, there is a need for the evaluation of elliptic integrals of first, second, moreover of third kind.

References

1. CSÁKI, F.: Theoretical Methods Concerned with the Asynchronous Operation of Turbo-Generators. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering IV.* 2 (1960) p. 117.
2. CSÁKI, F.: Linear Approximation of Admittance Diagrams for the Theoretical Examination of Turbo-Generators in Asynchronous Operation. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering IV.* 3 (1960) p. 145.
3. BYRD, P. F.—FRIEDMAN, M. D.: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists.* Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1954.
4. GRÖBNER, W.—HOFREITER, N.: *Integraltafel I.—II.* Springer-Verlag, Wien—Innsbruck. 1949—1950.
5. JANHKE—EMDE: *Tafeln Höherer Funktionen.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 1952.

Prof. F. CSÁKI, Budapest XI. Egri J. u. 18. V., Hungary.

DIE STROM-, MOMENTEN- UND LEISTUNGSVERHÄLTNISSE EINPHASIGER WINKELÜBERTRAGUNGSSYSTEME

Von

L. BAJZA

Lehrstuhl für Elektrische Maschinen und Messungen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 7. Mai 1960)

Soweit Verfasser bekannt, wurden manche Einzelheiten der einphasigen Winkelübertragungssysteme in der Fachliteratur noch nicht besprochen, obwohl dieses System in der Fernwirktechnik häufig verwendet wird. Es gibt ausgezeichnete Facharbeiten über die Berechnung des Primärstromes und des Momentes der einphasigen elektrischen Welle [1], [2], und bekannt ist auch das Arbeitsdiagramm der aus Vollpolmaschinen zusammengesetzten, an der

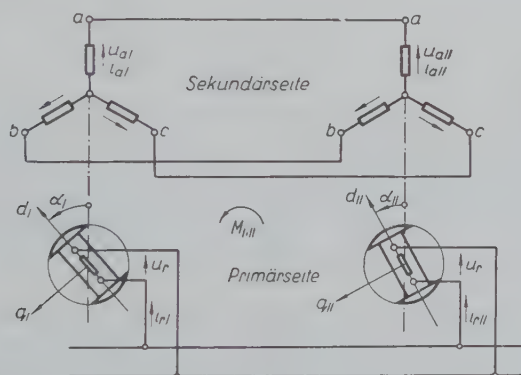


Abb. 1. Schaltbild der einphasigen elektrischen Welle

Primärseite dreiphasig gewickelten, jedoch einphasig geschalteten und gespeisten elektrischen Welle [3], [4]. Dennoch kommen in Winkelübertragungssystemen fast ohne Ausnahme Schenkelpolmaschinen zur Verwendung, da es dieser Weg ist, der am einfachsten zur Verminderung der Querimpedanz der Statorphasen führt, die die Erhöhung der Anfangsteilheit der Momentenkurven gewährleistet.

Das Ziel des vorliegenden Artikels ist die Entwicklung des Arbeitsdiagrammes und die Untersuchung der Momenten- und Leistungsverhältnisse bei primärseitig rein einphasigen und aus Schenkelpolmaschinen zusammengesetzten Winkelübertragungssystemen.

Abb. 1 zeigt das Schaltungsschema und die als positiv angenommenen

Richtungen von Phasenspannungen, Phasenströmen, Drehmomenten und Drehwinkeln.

Dreht sich die Welle der Maschine I (des Senders) infolge einer äußeren mechanischen Einwirkung um den Winkel α_I , so sucht sich die Welle der Maschine II (des Empfängers), dem entstandenen elektromagnetischen Drehmoment entsprechend, um einen Drehwinkel α_{II} zu verdrehen, dessen Größe mit der von α_I übereinstimmt. Wird die Welle des Empfängers durch ein Moment belastet, so ist zwangsweise $\alpha_{II} < \alpha_I$. Die Differenz der beiden Winkel ist als Winkelverschiebung durch

$$\delta = \alpha_I - \alpha_{II}.$$

definiert.

Die Ströme und Momente der Wellenmaschinen werden teils durch die oben definierte Winkelverschiebung, teils durch die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit Ω der beiden Rotoren vorgeschrieben. Letztere wollen wir aus formellen Gründen durch den auf die synchrone Winkelgeschwindigkeit ω bezogenen relativen Wert

$$q = \frac{\Omega}{\omega}$$

ausdrücken.

Da zwei Variable vorhanden sind, unterscheiden wir zwischen synchronem und asynchronem Betrieb ($q = \text{konst.}$ bzw. $\delta = \text{konst.}$). Obwohl der letztere kaum betriebsmäßig genannt werden kann, empfiehlt es sich dennoch, die Kurven des Stromdiagrammes für den asynchronen Betrieb zu konstruieren. Die Ortskurven des synchronen Betriebs ergeben sich durch die Verbindung der Punkte $q_i = \text{konst.}$

Das Arbeitsdiagramm des primären und sekundären Stromes setzt sich aus je einer Kurvenschar vierter Ordnung zusammen. Die rechnerische Ermittlung dieser Kurven erfordert einen großen und schwerfälligen Arbeitsaufwand. Im folgenden wird ein halbgraphisches Verfahren mitgeteilt, das es gestattet, das Arbeitsdiagramm des primären und sekundären Stromes mit verhältnismäßig geringer Rechenarbeit aufzutragen.

Im weiteren werden folgende Bedingungen vorausgesetzt:

1. die Klemmenspannung ändert sich mit der Zeit rein sinusförmig,
2. die Durchflutungen aller Wicklungen sind über den Ankerumfang sinusförmig verteilt,
3. die Dreiphasenwicklungen sind vollkommen symmetrisch,
4. die beiden Wellenmaschinen sind zweipolig und elektromagnetisch gleichwertig.

Die Eisenverluste werden vernachlässigt, und die magnetischen Kreise als linear angenommen. Bezeichnungen:

Die gewöhnlichen Momentanwerte der Spannungen, Ströme und Flüsse werden mit kleinen, die komplexen Momentanwerte mit fetten kleinen Buchstaben bezeichnet. Die großen Buchstaben bedeuten für Ströme und Spannungen den dem effektiven Wert entsprechenden Zeiger.

Die imaginäre Einheit wird bei Raumvektoren mit k , bei Zeigern mit j bezeichnet. Die Raumvektoren werden durch einen oberen Querstrich von den Zeigern unterschieden. Das Symbol $\bar{}$ bedeutet eine konjugiert komplexe Größe.

Die Sendergrößen erhalten den Index I, die Empfängergrößen den Index II, während r und s die Indizes der Rotor- bzw. Statorgrößen sind. Die auf das Polrad bezogenen Längs- und Querkomponenten der Statorgrößen sind voneinander durch die Indizes d bzw. q unterschieden.

u_s, \dot{i}_s, ψ_s Raumvektoren von Statorspannung, Statorstrom und Statorfluß. $\bar{u}_s = \frac{2}{3} (u_a + e^{k\pi/3} u_b + e^{j2\pi/3} u_c) e^{-ka} \bar{i}_s$ und $\bar{\psi}_s$ werden ähnlich definiert

u, U Spannung

i, I Strom

i_0, I_0 Primärstrom des Senders bzw. des Empfängers für $\delta = 0$

R Widerstand

L Induktivität pro Phase

L_m maximale Gegeninduktivität zwischen Rotorwicklung und einer Statorphase

X auf die Frequenz der Netzspannung bezogene Reaktanz

$Z_r = R_r + jX_r$ Leerlaufimpedanz (also bei stromloser Statorwicklung gemessene Impedanz) des Rotors

$a = \frac{\frac{3}{2} j X_m}{Z_r}$ natürliches Übersetzungsverhältnis zwischen den Primär- und Sekundärwicklungen

$a' = \frac{\frac{3}{2} X_m}{X_r}$

p Momentanwert der Leistung

P Wirkleistung

M algebraischer Mittelwert des Drehmomentes

α Drehwinkel

$\delta = \alpha_I - \alpha_{II}$ Winkelverschiebung

Ω mechanische Winkelgeschwindigkeit

$\omega = 2\pi f$ der Netzfrequenz entsprechende synchrone Winkelgeschwindigkeit

$q = \frac{\Omega}{\omega}$ relative Drehzahl

Re reeller Teil einer komplexen Größe.

Zusammenfassende Bezeichnungen:

$$L_S = \frac{L_d + L_q}{2}$$

$$L_D = \frac{L_d - L_q}{2}$$

$$A = j\omega (L_S - L_m a/2)$$

$$B = j\omega (L_D - L_m a/2)$$

$$C = \frac{j X_m}{2 Z_r} = \frac{a}{3}$$

$$\bar{A} = R_S + (j\omega + k\Omega) (L_S - L_m a/2)$$

$$\bar{B} = (j\omega + k\Omega) (L_D - L_m a/2)$$

$$C = (j\omega + k\Omega) \frac{L_m}{Z_r}$$

$$v = 1 - q^2$$

$$I_{d\text{ I, II}}'' = -|a| I_{d\text{ I, II}}$$

$$X_{d'} = X_d - a' X_m$$

D, E, F, G, H, K, L in j komplexe Größen.

I. Die Konstruktion der Arbeitsdiagramme

Um die Momente und Leistungen berechnen zu können, muß man die drei Ströme I_d , I_q und I_r des Senders bzw. des Empfängers kennen.

Die Lösung der Spannungsgleichung des Stators ergibt für die Längs- und Querkomponenten des Statorstromes folgende Beziehungen [s. (I. 13) und (I. 14)]:

$$I_{d\text{ I, II}} = -\frac{U_r}{3} a \frac{[R_S + (1 - q^2)(A + B \cos \delta)](1 - \cos \delta) \pm j q R_S \sin \delta}{R_S^2 + 2R_S A + (1 - q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)}$$

und

$$I_{q\text{ I, II}} = \frac{U_r}{3} a \frac{\mp [R_S + (1 - q^2)(A + B \cos \delta)] \sin \delta + j q R_S (1 - \cos \delta)}{R_S^2 + 2R_S A + (1 - q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)},$$

oder in vereinfachter Form

$$I_{d\text{ I, II}} = -D(1 - \cos \delta) \mp E \sin \delta$$

$$I_{q\text{ I, II}} = \mp D \sin \delta + E(1 - \cos \delta).$$

Aus dem Vergleich der beiden Gleichungen folgt, daß sich das Arbeitsdiagramm des Querstromes auf einfache Weise aus dem des Längsstromes ergibt. Mit Rücksicht auf die Vorzeichen sind die Vektoren des ersten bzw. zweiten Gliedes von I_d mit den Faktoren $\sin \delta / (1 - \cos \delta)$ bzw. $(1 - \cos \delta) / \sin \delta$ zu multiplizieren.

Der Primärstrom ist die Differenz des Leerlaufstromes und der reduzierten Längskomponente des Statorstromes

$$I_{rI,II} = I_0 - a I_{dI,II}.$$

Konstruiert man also das Stromdiagramm von $I_{dI,II}'' = -|a| I_{dI,II}$ statt des Diagramms von $I_{dI,II}$, so ergibt sich nach entsprechender Veränderung des Strommaßstabes und unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens die Vektorschar von $I_{dI,II}$. Dies gestattet die Vermeidung der gesonderten Konstruktion des Stromdiagrammes von $I_{rI,II}$, so daß man nur das Koordinatensystem um $-\arg. a$ zu verdrehen und seinen Nullpunkt um $-I_0$ zu verschieben muß.

Infolge dieser Modifizierung müssen die trigonometrischen Faktoren bei der Konstruktion des Stromdiagrammes $I_{qI,II}$ mit $-1/|a|$ erweitert werden.

II. Das Stromdiagramm von $I_{dI,II}'$ und $I_{rI,II}$

Im Sinne der bisherigen Ausführungen wollen wir unseren weiteren Untersuchungen folgende Stromgleichung zugrunde legen:

$$I_{dI,II}'' = |a| a \frac{U_r}{3} \left[\frac{[R_s + (1-q^2)(A - B \cos \delta)](1 - \cos \delta)}{R_s^2 + 2R_s A + (1-q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)} \pm \frac{j q R_s \sin \delta}{R_s^2 + 2R_s A + (1-q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)} \right]. \quad (1)$$

Bei der Konstruktion des Arbeitsdiagrammes wird man als Basis zweckmäßig die Kurven des synchronen Betriebs $q = 0 = \text{konst.}$, $q = 1 = \text{konst.}$ und $q = \infty = \text{konst.}$ wählen.

a) Ist $q = 0$, so sind die Längskomponenten der Statorströme der Wellenmaschinen untereinander gleich, und ihr Stromdiagramm ist ein Kreis durch den Nullpunkt:

$$I_{dI,II}'' = |a| a \frac{U_r}{3} \frac{1 - \cos \delta}{R_s + j \frac{X_d + X_q - a X_m}{2} - j \frac{X_d - X_q - a X_m}{2} \cos \delta}. \quad (2)$$

b) Ist $q = 1$, so ist das Arbeitsdiagramm von $I_{dI,II}''$ ein Kreis, der ebenfalls durch den Nullpunkt geht, und dessen Gleichung sich zweckmäßig in der Form

$$I_{dI,II}'' = |a| a \frac{U_r}{3} (1 - e^{\mp j \delta}) \frac{1}{R_s + j (X_d + X_q - a X_m)} \quad (3)$$

aufschreiben läßt. Die Vektoren von I_{dI}'' durchlaufen den oberen, die Vektoren von I_{dII}'' den unteren Halbkreis, wenn sich die Winkelverschiebung von 0 bis

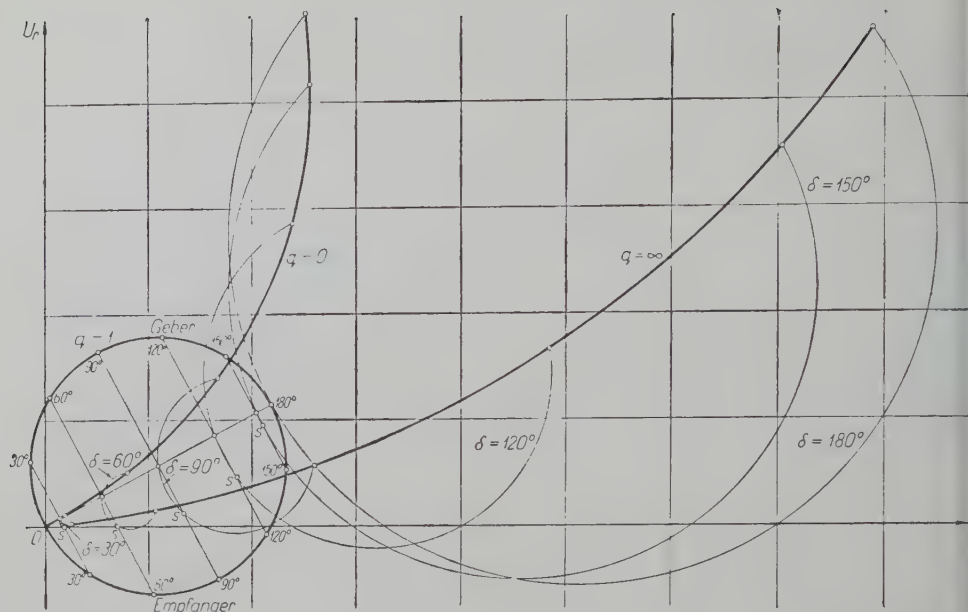


Abb. 2. Die synchronen Kreise $q = 0$, $q = 1$, $q = \infty$ und einige Grundkreise des Stromdiagrammes von $I_{d1,II}$

180° ändert. Zum Auftragen des asynchronen Kreises $q = 1$ genügt die Berechnung eines einzigen, nämlich des Mittelpunktvektors. Die Parameterverteilung ergibt sich gemäß (3) durch eine einfache Konstruktion.

c) Im Falle $q = \infty$ sind die Ströme $I''_{d1} = I''_{d11}$. Das Kreisdiagramm geht also durch den Nullpunkt:

$$I''_{d1,II} = |a| a \frac{U_r}{3} \frac{1 - \cos \delta}{j \frac{X_d + X_q - a X_m}{2} - j \frac{X_d - X_q - a X_m}{2} \cos \delta}. \quad (4)$$

d) Ist $\delta = 180^\circ = \text{konst.}$, so können die beiden Wellenmaschinen als selbständige einphasige Asynchronmaschinen angesehen werden. Die drei Hauptpunkte des Kreisdiagrammes stehen bereits zur Verfügung.

Abb. 2 zeigt die oben behandelten drei synchronen Kreise, und den im Falle $\delta = 180^\circ$ geltenden asynchronen Kreis, d. h. deren physikalisch sinnvollen Teile.

Hier sei erwähnt, daß die beiden synchronen Kreise $q = 0$ und $q = \infty$ einen gemeinsamen Punkt für $\cos \delta = \infty$ (d. i. für imaginäre Werte von δ) besitzen. Damit hat man die Möglichkeit, die bisher behandelten vier Kreise nach Berechnung von insgesamt bloß vier Punkten aufzutragen. Da die Konstruktion der Verteilung von $\cos \delta$ hauptsächlich beim Kreis $q = \infty$ ungenau werden kann, empfiehlt sich die Berechnung einiger weiterer Punkte.

Der allgemeine Ausdruck für die asynchronen Arbeitsdiagramme schreibt sich gemäß (1) zu

$$I''_{dI, II} = \frac{F + q^2 G}{H + q^2 K} \pm \frac{qL}{H + q^2 K}, \quad (5)$$

oder in vereinfachter Form zu

$$I''_{dI, II} = V_1(q) \pm V_2(q).$$

Dem ersten Glied entsprechen Kreise mit quadratischer Parameterverteilung, die wir im weiteren Grundkreise nennen wollen. Sie lassen sich anhand der drei synchronen Hauptkreise $q = 0$, $q = 1$ und $q = \infty$ und ihrer Parameterverteilung aufzeichnen.

Es ist eine bekannte Eigenschaft der Funktionen gemäß Gl. (5), daß die Vektoren des zweiten Gliedes eine Vektorschar durch den (am Grundkreis liegenden) singulären Punkt bilden. Daraus folgt, daß die Punkte $q = 1$ der Grundkreise an dem zu $\delta = 180^\circ$ gehörenden Durchmesser des synchronen Kreises $q = 1$ liegen. Ihre Lage wird durch Sehnen desselben Kreises bestimmt, die durch jene Punkte verlaufen, die den im Sender- und Empfängerbetrieb gleichen Winkelverschiebungswerten zugeordnet sind. Die über bzw. unter dem erwähnten Durchmesser liegenden Strecken dieser Sehnen ergeben die den entsprechenden Werten von δ und dem $q = 1$ zugehörigen Werte des zweiten Gliedes der Gleichung (5). Auf diesen Sehnen liegen gleichzeitig auch die singulären Punkte.

In Abb. 2 sind auch die oben behandelten Grundkreise des Stromdiagrammes des asynchronen Betriebes dargestellt.

Die Auftragung der Kurvenschar des asynchronen Betriebs erfordert also außer der Kenntnis der bisher berechneten vier Punkte die rechnerische Ermittlung der dem zweiten Glied der Gleichung (5) entsprechenden Vektorschar. Diese Vektoren bestimmen je eine Richtung. Die in dieser Richtung durch den singulären Punkt des entsprechenden Grundkreises gezogene Gerade ergibt am Grundkreis einen Schnittpunkt, aus dem als Grundpunkt der entsprechende Vektor mit positivem bzw. negativem Vorzeichen aufzutragen ist. Die Konstruktion der Parameterverteilung der Grundkreise läßt sich also vermeiden, dennoch kann sie als Kontrolle der Konstruktion dienen. Die Sehnen zwischen den singulären Punkten und den Punkten $q = 0$ bzw. $q = \infty$ der Grundkreise sind die den entsprechenden Punkten zugehörigen Tangenten der resultierenden asynchronen Arbeitsdiagramme.

Gibt die Sehne des synchronen Kreises $q = 1$ mit dem entsprechenden Grundkreis keinen scharfen Schnitt, ist also die Lage des singulären Punktes nicht genau bestimmt, dann ermöglicht die rechnerische Ermittlung einer der beiden Tangenten die genaue Festlegung des singulären Punktes.

Die Ortskurven in Abb. 3 stellen im Koordinatensystem $(+1), (+j)$ die Arbeitsdiagramme für $I''_{dI,II}$ im asynchronen Betrieb dar. Dieselbe Kurvenschar ergibt im Koordinatensystem $+1, +j$ die asynchronen Arbeitsdiagramme von $I_{rI,II}$.

Die asynchrone Arbeitsdiagramme von $I''_{dI,II}$ und $I_{rI,II}$ haben die charakteristische Eigenschaft, daß der Einfluß des zweiten Gliedes der Gl. (5) mit zunehmender Winkelverschiebung nach und nach verschwindet, wogegen die Durchmesser der Grundkreise immer größer werden. Diese formelle Ände-

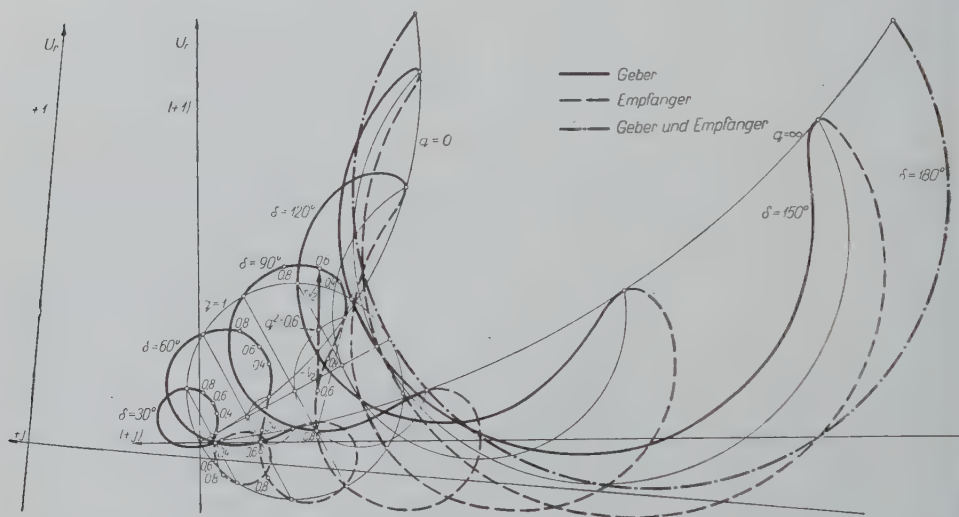


Abb. 3. Das Stromdiagramm von $I''_{dI,II}$ bzw. $I_{rI,II}$ in asynchronem Betrieb

rung der asynchronen Arbeitsdiagramme obiger Ströme läßt den physikalischen Charakter des Überganges aus dem Wellenbetrieb in den asynchronen Motorbetrieb erkennen.

III. Das Stromdiagramm von $I_{qI,II}$

Wie einleitend bereits erwähnt, kann die Querkomponente des sekundären Stromes aus der Längskomponente ermittelt werden, indem man die Vektoren der Grundkreise mit $\mp \sin \delta / |a| (1 - \cos \delta)$, die mit positivem Vorzeichen genommenen Vektoren des zweiten Gliedes hingegen mit $(1 - \cos \delta) / |a| \sin \delta$ multipliziert.

Den Kreisen $q = 0$ und $q = \infty$ von $I''_{dI,II}$ entsprechen im Stromdiagramme von $I_{qI,II}$ Ortskurven vierter Ordnung. Die Kurve $q = 1$ bleibt auch im Stromdiagramm von $I_{qI,II}$ ein Kreis und spielt die gleiche Rolle wie bei der Konstruktion des Stromdiagrammes von $I_{dI,II}$.

Für $q = 1$ ergibt (I.14)

$$I_{q1,II} = j \frac{U_r}{3} a (1 - e^{\mp j\delta}) - \frac{1}{R_s + j(X_d + X_q - aX_m)},$$

der Mittelpunktvektor des Kreises $q = 1$ von $I_{d1,II}$ ist also mit j/a zu multiplizieren.

Abb. 4 zeigt die Konstruktion der Grundkreise der Kurvenschar von $I_{q1,II}$. Die Punkte $q = 1$ befinden sich auch hier auf einer Geraden, und die singulären Punkte sind durch die verlängerten Sehnen des Kreises $q = 1$ bestimmt.

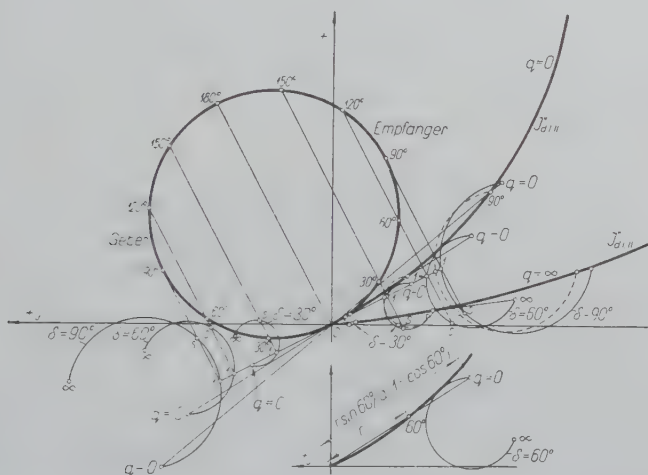


Abb. 4. Der synchrone Kreis $q = 1$ und einige Grundkreise des Stromdiagrammes von $I_{q1,II}$

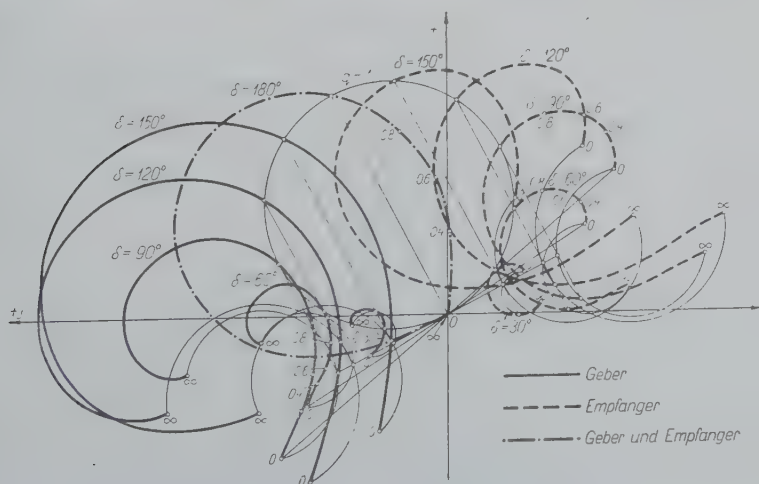


Abb. 5. Das Stromdiagramm von $I_{q1,II}$ in asynchronem Betrieb

Da die dem zweiten Glied der Gl. (5) entsprechenden Vektoren V_2 im Falle $\delta = 180^\circ$ verschwinden, sind diese bei der Konstruktion des Stromdiagrammes von $I_{qI, II}$ rechnerisch zu ermitteln.

In Abb. 5. sind die Ortskurven des Statorquerstromes dargestellt.

Die Genauigkeit der Konstruktion kann auf folgende Weise geprüft werden. Nach (I.10) ist

$$\operatorname{Re} [I_{dI}] + k \operatorname{Re} [I_{qI}] = - \{ \operatorname{Re} [I_{dII}] + k \operatorname{Re} [I_{qII}] \} e^{-k\delta}.$$

Die aus den reellen Komponenten von I_{dI} und I_{qI} zusammengesetzten Vektoren müssen den aus $-I_{dII}$ und $-I_{qII}$ auf ähnliche Weise zusammengesetzten und in demselben System dargestellten Vektoren um den Winkel δ nacheilen, und überdies müssen ihre absoluten Werte einander gleich sein, doch ist dies nur eine notwendige, jedoch keine ausreichende Bedingung der Genauigkeit.

IV. Die Leistungsverhältnisse des einphasigen Winkelübertragungssystems

Die an den Klemmen gemessene primäre Wirkleistung ist

$$P_r = \operatorname{Re} [U_r \dot{I}_r].$$

Ihre Werte bei verschiedenen Winkelverschiebungen und Drehzahlen lassen sich aus dem Stromdiagramm entnehmen. Abb. 3 zeigt, daß der Sender hinsichtlich des einphasigen Netzes stets Verbraucher ist, wogegen der Empfänger innerhalb eines ziemlich weiten Wertbereiches von δ und q auch im Generatorbetrieb zu arbeiten vermag. (Im Bereich unter der Achse $-j$ speist der Empfänger Leistung ins Netz zurück.) Die diesbezüglich in der Literatur geäußerte Ansicht, im Falle $q < 1$ arbeiteten beide Wellenmaschinen als Motoren, bei $q > 1$ hingegen als Generatoren, scheint demnach nicht zuzutreffen.

Die sekundäre Klemmenleistung errechnet sich aus dem allgemein gültigen Zusammenhang

$$P_s = \frac{3}{2} (\bar{u}_s \dot{i}_s),$$

aus dem sich nach Durchführung der skalaren Multiplikation

$$P_s = \frac{3}{2} (u_d \dot{i}_d + u_q \dot{i}_q)$$

ergibt. Laut (I.8) ist die Spannungsgleichung des Stators

$$u_s = \bar{i}_s \bar{A} + \hat{i}_s \bar{B} + u_r \bar{C}.$$

Zerlegt man diese in die nach k reellen und imaginären Komponenten, dann erhält man folgende Ausdrücke für u_d und u_q :

$$u_d = i_d [R_s + j\omega (L_d - aL_m)] - i_q \Omega L_q + i_0 j\omega L_m,$$

$$u_q = i_d \Omega (L_d - aL_m) + i_q (R_s + j\omega L_q) + i_0 \Omega L_m,$$

woraus sich nach einfacher Umordnung und Weglassung der Zeitfunktion

$$U_d = I_d (R_s + jX_d) + jX_m(I_0 - aI_d) - qI_qX_q$$

$$U_q = qI_dX_d + qX_m(I_0 - aI_d) + I_q(R_s + jX_q)$$

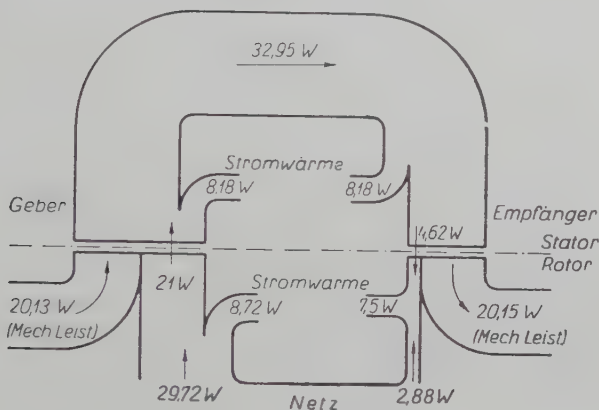


Abb. 6. Leistungsfluß der Wellenmaschinen bei $q = 0,6$ und $\delta = 60^\circ$

ergibt. Die Wirkleistung an den Klemmen des Stators schreibt sich demnach zu

$$P_s = \frac{3}{2} \operatorname{Re} (U_d \hat{I}_d + U_q \hat{I}_q)$$

womit man

$$P_s = \frac{3}{2} (I_d \hat{I}_d + I_q \hat{I}_q) R_s + \frac{3}{2} q \operatorname{Re} [I_d \hat{I}_q (X_d - X_q) + I_r \hat{I}_q X_m] + \\ + \frac{3}{2} \operatorname{Re} [j X_m I_r \hat{I}_d] \quad (6)$$

erhält. Dem ersten Glied dieser Gleichung entspricht die Statorstromwärme, dem der Drehzahl proportionalen zweiten Teil hingegen die mechanische Leistung, dem dritten die transformatorische Leistung.

Abb. 6 zeigt ein charakteristisches Bild des Leistungsflusses bei mäßigen Werten der Winkelverschiebung und der relativen Drehzahl. (Die Abbildung entspricht den Werten $\delta = 60^\circ$ und $q = 0,6$.)

V. Das Drehmoment des einphasigen Winkelübertragungssystems bei kleinen Winkelverschiebungen

Der allgemein geltende Ausdruck für das Drehmoment kann der Leistungsgleichung des vorigen Kapitels entnommen werden:

$$M = \frac{3}{2} \frac{1}{\omega} \operatorname{Re} [I_d \hat{I}_q (X_d - X_q) + I_r \hat{I}_q X_m]. \quad (7)$$

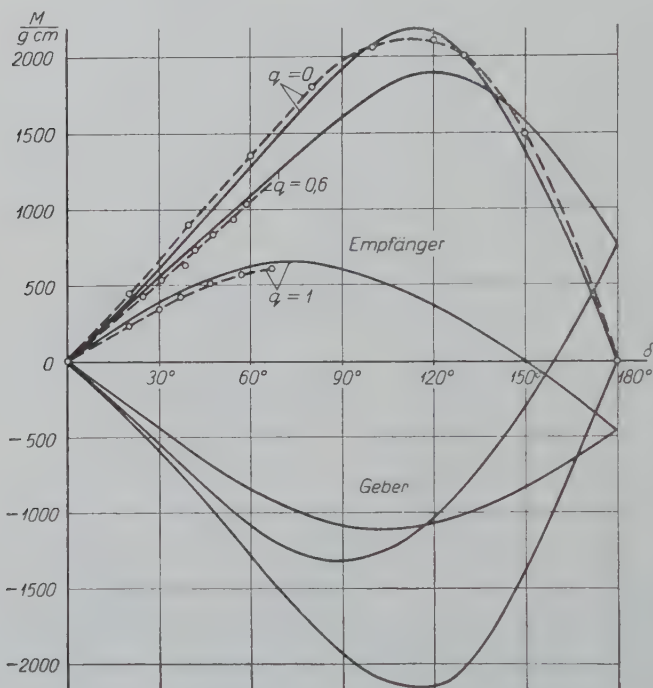


Abb. 7. Die Kennlinien $M = f(\delta)$ der beiden Wellenmaschinen. (Die durch experimentell ermittelten Kurven sind gestrichelt)

Die in Abb. 7. dargestellten Momentenkurven wurden anhand dieser Gleichung und der dem Stromdiagramm entnommenen Daten berechnet. Die Abbildung zeigt auch die Ergebnisse der Kontrollmessungen.

Werden die Ausdrücke für die Ströme in (7) eingesetzt, so erhält man eine unmittelbare Beziehung zwischen Moment einerseits und Drehzahl bzw. Winkelverschiebung andererseits. Da aber die Ströme selbst ziemlich verwickelte Funktionen der Drehzahl, der Winkelverschiebung und der Maschinenkonstanten sind, wäre der für das Drehmoment so errechnete Ausdruck infolge seiner komplizierten Form praktisch unbrauchbar.

Was die Anwendungen in der Fernwirktechnik betrifft, sind nur die Anfangsstrecken der Momentenkurven (d.h. die Momentenwerte bei kleinen Win-

kelverschiebungen) von größerem Interesse, weshalb im folgenden nur diese Strecken behandelt werden.

Bei kleinen Winkelverschiebungen gilt annähernd $1 - \cos \delta \cong 0$, $\sin \delta \cong \delta$, die Ströme $I_{dI, II}$ und $I_{qI, II}$ sind also in diesem Falle laut (I.13) und (I.14) δ proportional. Das skalare Produkt $I_d \hat{I}_q$ im ersten Glied der Momentengleichung ist also δ^2 proportional, so daß es vernachlässigt werden kann. Wird der Rotorstrom wieder in der Form

$$I_r = I_0 - a I_d$$

geschrieben, dann folgt aus ähnlichen Gründen, daß die Anfangsstrecke der Momentenkurven durch den Ausdruck

$$M = \frac{3}{2} L_m \operatorname{Re} [I_0 \hat{I}_q] \quad (8)$$

beschrieben wird.

Vernachlässigt man den Rotorwiderstand, so wird das Übersetzungsverhältnis reell, d. h.

$$a' = \frac{3}{2} \frac{X_m}{X_r}.$$

In diesem Falle empfiehlt sich die Einführung der Abkürzung

$$X_{d\sigma} = X_d - a' X_m.$$

Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich der Querstrom zu

$$I_{qI, II} = \mp \frac{U_r}{3} a' \delta \frac{1}{R_s + j X_q + \frac{q^2 R_s j X_{d\sigma}}{R_s^2 + (1 - q^2) j X_{d\sigma}}}. \quad (9)$$

Die physikalischen Grundlagen dieser Gleichung lassen sich leicht erklären. Entsprechend der Abb. 8, die die räumlichen Verhältnisse darstellt, ist die Differenz der Statorspannungen, die den Querstrom hervorruft, bei kleinen

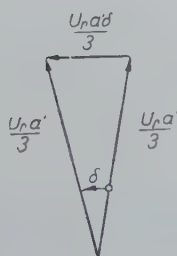


Abb. 8

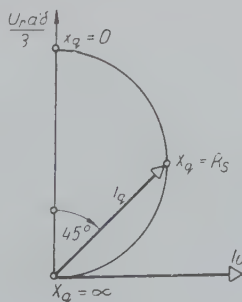


Abb. 9

Winkelverschiebungen gleich $U_r \alpha' \delta / 3$. Im Stillstand der Maschinen ist die für den Querstrom maßgebende Impedanz gleich $R_s + jX_q$. Bei unendlich großer Drehzahl beider Maschinen verschwindet der Widerstand R_s — wie zu erwarten —, und der Querstrom wird durch X_q bestimmt.

Die größere Anfangsteilheit der Momentenkurven der Wellenmaschinen mit ausgeprägten Polen wird physikalisch durch (9) erklärt. Abb. 9 gilt für den Stillstand der Wellenmaschinen. Sind die Primärspannung, die Winkelverschiebung, die Widerstände und mit Ausnahme von X_q auch die Reaktanzen konstant, so liegen die Zeiger des Querstromes mit ihrem Endpunkt bei veränderlichem X_q auf dem in der Abbildung dargestellten Halbkreis. Das reelle Teil des Produktes $I_0 \hat{I}_q$ wurde seinen Maximalwert bei $X_q = R_s$ erreichen, was zugleich dem Höchstwert der Anfangsteilheit der Momentenkurven entspricht; dieser Fall kann jedoch praktisch nicht verwirklicht werden.

Es ist bemerkenswert, daß der absolute Wert des ersten Gliedes der Momentengleichung (7) stets kleiner ist als der des zweiten und ein entgegengesetztes Vorzeichen besitzt.

Infolge Vernachlässigung des Rotorwiderstandes R_r wird der Zeiger des Leerlaufstromes rein imaginär, es genügt also, bei der Berechnung der Momentenwerte bei kleinen Winkelverschiebungen nur den imaginären Teil des Querstromes I_q zu berücksichtigen. Der Ausdruck für das Drehmoment wird dadurch wesentlich vereinfacht.

Mit (8) und (9) sowie mit $(1 - q^2) = v$ erhalten wir

$$M = \frac{3}{2} \frac{U_r^2}{2} \frac{X_m^2}{X_r^2} \frac{1}{\omega} \frac{X_q + X_{d\sigma} - v X_{d\sigma} + v^2 X_q \frac{X_{d\sigma}^2}{R_s^2}}{R_s^2 + (X_q + X_{d\sigma})^2 - 2v X_q X_{d\sigma} + v^2 X_q^2 \frac{X_{d\sigma}^2}{R_s^2}} - \delta. \quad (10)$$

Die aus der Gl. (7) bzw. Gl. (10) berechneten Steilheitswerte sind in Tabelle I den gemessenen Daten gegenübergestellt. Im Wellenbetrieb sind fast immer Pendelungen vorhanden, die die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigen. Die Meßdaten der Tabelle I sind nach einem linearen Ausgleich der Momentenwerte im Bereich $0 < \delta \leq 30^\circ$ eingesetzt.

Tabelle I

	$\partial M / \partial \delta$ [gcm/°]					
	$q = 0$	$q = 0,2$	$q = 0,4$	$q = 0,6$	$q = 0,8$	$q = 1$
Meßdaten	21	20	18,9	17,1	14,5	11,5
Aus Gl. (7) berechnet						
$M(30^\circ)/30^\circ$	20,4	20	19,39	18,18	15,3	12,82
Aus Gl. (10) berechnet	20,2	19,82	19,3	18,3	16,95	15,9

Anhang

Die Spannungsgleichung des Stators, bezogen auf ein mit dem Rotor starr verbundenes Koordinatensystem, lautet

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + k \Omega \bar{\psi}_s. \quad (\text{I.1})$$

Die komplexen Raumvektoren \bar{u}_s , \bar{i}_s und $\bar{\psi}_s$ lassen sich durch ihre reellen und imaginären Teile (Längs- und Querkomponenten) ausdrücken (s. Abb. I.1):

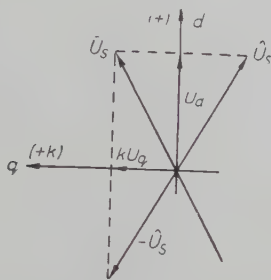


Abb. I. 1

$$\bar{u}_s = u_d + k u_q = \frac{\bar{u}_s + \hat{u}_s}{2} + \frac{\bar{u}_s - \hat{u}_s}{2}. \quad (\text{I.2})$$

Da

$$\psi_d = L_d i_d + L_m i_r$$

und

$$\psi_q = L_q i_q,$$

ist, kann der Flußvektor der Spannungsgleichung (I.1) mit i_s und \hat{i}_s in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\bar{\psi}_s = L_d \frac{\hat{i}_s + \bar{i}_s}{2} + L_q \frac{\bar{i}_s - \hat{i}_s}{2} + L_m i_r$$

der

$$\bar{\psi}_s = L_s \bar{i}_s + L_D \hat{i}_s + L_m i_r. \quad (\text{I.3})$$

Hier ist L_s die Hälfte der Summe, L_D die Hälfte der Differenz der Längs- und Querinduktivitäten der Statorphasen. $\bar{\psi}_s$ ändert sich in dem mit dem Rotor verknüpften Koordinatensystem nach dem Sinusgesetz. Durch Differentiation erhalten wir

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + (j\omega + k\Omega) (L_s \hat{i}_s + L_D \hat{i}_s + L_m i_r). \quad (\text{I.4})$$

Die Spannungsgleichung des Rotors ist:

$$u_r = i_r R_r + j \omega \psi_r, \quad (\text{I.5})$$

wo

$$\psi_r = L_r \hat{i}_r + \frac{3}{2} L_m \frac{\bar{\hat{i}}_s + \hat{i}_s}{2}.$$

Aus den beiden letzteren Gleichungen ergibt sich der Rotorstrom zu

$$\hat{i}_r = \frac{u_r}{Z_r} - a \frac{\bar{\hat{i}}_s + \hat{i}_s}{2}, \quad (\text{I.6})$$

wo $a = \frac{3}{2} j X_m / Z_r$ das sogenannte natürliche Übersetzungsverhältnis ist.

Mit Gleichung (I.6) schreibt sich (I.4) in der Form

$$\bar{u}_s = \bar{\hat{i}}_s R_s + (j\omega + k\Omega) \left[L_s \bar{\hat{i}}_s + L_D \hat{i}_s + L_m \frac{u_r}{Z_r} - a L_m \frac{\bar{\hat{i}}_s + \hat{i}_s}{2} \right].$$

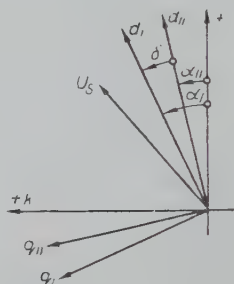


Abb. I. 2.

Nach einer kleinen Umrechnung und Einführung des auf die Sendemaschine bezogenen Indizes I erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{u}_{sI} = \bar{\hat{i}}_{sI} \left[R_s + (j\omega + k\Omega) \left(L_s - L_m \frac{a}{2} \right) \right] + \hat{i}_{sI} (j\omega + k\Omega) \left(L_D - L_m \frac{a}{2} \right) + \\ + (j\omega + k\Omega) L_m \frac{u_r}{Z_r}, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

oder wenn die Koeffizienten in je ein Symbol zusammengefaßt werden

$$\bar{u}_{sI} = \bar{\hat{i}}_{sI} \bar{A} + \hat{i}_{sI} \bar{B} + u_r \bar{C}. \quad (\text{I.8})$$

Ähnlich ergibt sich auch die Spannungsgleichung der Empfängermaschine. Infolge der Parallelschaltung sind die Statorspannungen einander gleich. Die beiden Maschinen sind aber in verschiedenen Koordinatensystemen behandelt weshalb (s. Abb. I.2)

$$\bar{u}_{sI} = \bar{u}_{sII} e^{-k\delta} \quad (\text{I.9})$$

ist und mit Rücksicht auf die Zählfeile der Abb. 1

$$\bar{i}_{sI} = -\bar{i}_{sII} e^{-k\delta} \quad (\text{I.10})$$

Unter Verwendung von (I.9) und (I.10) erhalten wir die auf die Sendemaschine bezogene, der Form nach der Gleichung (I.8) ähnliche Spannungsgleichung

$$\bar{u}_{sI} e^{k\delta} = -\bar{i}_{sI} e^{k\delta} \bar{A} - \hat{i}_{sI} e^{-k\delta} \bar{B} + u_r \bar{C}. \quad (\text{I.11})$$

Durch Gegenüberstellung von (I.8) und (I.11) ergibt sich für die Statorspannung des Senders die Gleichung

$$2\bar{A} \bar{i}_{sI} + \bar{B} (1 - e^{-2k\delta}) \hat{i}_{sI} + \bar{C} (1 - e^{-k\delta}) u_r = 0. \quad (\text{I.12})$$

Die Zerlegung von (I.12) in ihre nach k reellen und imaginären Teilen ergibt die beiden Ströme i_{dI} und i_{qI} . Ähnlich werden die Ströme i_{dII} und i_{qII} ermittelt. Nach Einführung der gewöhnlichen komplexen Zeiger erhalten wir

$$I_{dI, II} = -\frac{U_r}{3} a \frac{[R_s + (1 - q^2)(A - B \cos \delta)] (1 - \cos \delta) \pm j q R_s \sin \delta}{R_s^2 + 2 R_s A + (1 - q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)} \quad (\text{I.13})$$

und

$$I_{qI, II} = \frac{U_r}{3} a \frac{\mp [R_s + (1 - q^2)(A - B \cos \delta)] \sin \delta + j q R_s (1 - \cos \delta)}{R_s^2 + 2 R_s A + (1 - q^2)(A^2 - B^2 \cos^2 \delta)}. \quad (\text{I.14})$$

In den Gleichungen (I.13) und (I.14) beziehen sich die oberen Vorzeichen auf den Sender, die unteren auf den Empfänger.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie die Arbeitsdiagramme der aus Schenkelpolmaschinen zusammengesetzten einphasigen Winkelübertragungssysteme mit Hilfe der Maschinendaten konstruiert werden können. Die Arbeitsdiagramme ermöglichen die qualitative und zahlenmäßige Beurteilung der Leistungsverhältnisse. Es läßt sich feststellen, daß der Sender hinsichtlich des Speisernetzes stets als Motor wirkt, der Empfänger dagegen aus dem Motorzustand in den Generatorbetrieb übergehen kann. Ferner wird für mäßige Werte der relativen Drehzahl und der Winkelverschiebung eine verhältnismäßig einfache Formel für das Drehmoment abgeleitet.

Literatur

1. Иосифьян, А. Г. — Каган, Б. М.: Основы следящего привода. Государственное энергетическое издательство, Москва — Ленинград 1954.
2. JÁNOKI, L.: Eine neue Methode zur Berechnung der Moment-Winkelübertragungscharakteristik von einphasigen elektrischen Wellen. Acta Technica Tomus XXIV. Fasciculi 1—2.
3. KOVÁCS, K. P.: Villamos gépek üzemtana. Aszinkron gépek. Tankönyvkiadó, Bp. 1955.
4. MESAROVIC, M.: Konstruktion und experimentelle Untersuchung des Arbeitsdiagrammes einer Einphasen-Ausgleichswelle. Arch. f. E. **XLI** 384 (1955).

L. BAJZA, Budapest XI. Budafoki út 8, Ungarn.

NEW MICROWAVE NOISE GENERATOR FOR THE 2000 MC/s BAND

By

G. ALMÁSSY and I. FRIGYES

Institute of Wireless Telecommunication, Polytechnical University, Budapest

(Received May 6, 1960)

I. General considerations

When determining the sensitivity, *i. e.* to be more exact: the noise-factor of a receiver, either a signal generator, or a noise generator could be used as a signal source. Signal generators have an output power a great deal higher, than is actually needed, therefore, two problems arise in connection with them. First: a frequency-independent power divider must be used between the oscillator and the receiver. Second: the oscillator must be excellently screened. The output power of noise generators on the other hand is generated on the very level needed, therefore, the problems mentioned above do not arise in connection with them. Moreover, certain types of noise generators have an additional advantage, too: their output power is the function of either such physical quantities which can readily be determined only, or of data easily measurable macroscopically. Thus the noise generators need no calibration. Since it is easy to determine the output power of a noise generator to an accuracy of a few tenth of db, it is advisable to use a noise generator instead of a signal generator to check highly sensitive receivers, especially microwave receivers. The most generally used microwave signal sources are: thermal noise, shot effect and excess noise of semiconductors.

A readily attainable signal source, using the thermal noise, is to place a body of high temperature — mostly a heater filament — into the transmission line [1]. The noise temperatures that can be reached with this kind of noise generator lie around 2500 K°. A gas discharge tube placed in a transmission line will produce thermal noise, too [2]. The noise temperatures of such generators are about 10 000—12 000 K°.

The noise generators used mostly in the lower frequencies work with a saturated diode and make use of the shot effect. The noise temperature of these is the function of the direct current flowing in the tube alone. Owing to different disturbing effects (series resonance, interelectrode capacitances, difficult matching conditions), common diodes cannot be used in the microwave region without certain disadvantages [3]. Coaxially-built noise diodes have been developed especially for microwave use. The noise klystron also makes use of the shot effect [4]. Since this is a multielectrode tube, a certain amount

of partition noise is present besides the shot noise. Therefore, its output noise power cannot be calculated accurately enough, such a noise generator must be calibrated.

Crystal diodes are also used as noise sources. In this case the excess noise, characteristic to semiconductors is made use of [5]. The noise temperature of such a generator cannot be determined from the working conditions, therefore, they need calibration quite often.

Having compared the above-mentioned types with each other, the results could be summed up in the following: the thermal noise sources are very good for microwave purposes, because their noise level can be accurately calculated and it is rather easy to match a transmission line with them. Considering the average microwave receiver, the output level of the heater-filament noise generator is too low, therefore, the gas discharge tube noise generator is the one which is especially suitable for this purpose. The microwave noise generators generally work with gas discharge tubes. The coaxial diode lacks a few of the above-mentioned disadvantages, but because of its complexity it is rather expensive.

The crystal diode as a noise source cannot be relied on and should, therefore, be used only as a workshop control apparatus. The noise klystron is relatively expensive and needs calibration.

1. Noise of gas-discharge phenomena

In the plasma of a gas-discharge there are free electrons, ions and gas atoms. The electrons may move around, can collide with the ions or atoms resp. These collisions may result in a recombination or a new ionization. Since the mass of ions is several magnitudes greater than that of the electrons, they are much less mobile, so that their effect is negligible in respect to both conduction and noise.

The noise produced by the plasma can be calculated from the following reasoning [6].

The noise is fully determined, if for example, the spectral distribution of the noise current is known. The noise current is made up of current pulses which are affected by the movement of single electrons. The spectral distribution of the noise current, in this case can be determined the most simply with the help of the Fourier spectra of the single pulses.

The mean square of the noise current, i^2 can be expressed with its Fourier spectrum:

$$\overline{i^2} = w(f) df$$

As is known from literature [6]:

$$w(f) = \frac{4e^2 \bar{N} \tau_0}{d^2 (1 + \omega^2 \tau_0^2)} \overline{v_x^2} + a_x^2 \tau_0^2 \frac{3 + \omega^2 \tau_0^2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \quad (1)$$

where \bar{N} = the average number of electrons
 d = the distance between anode and cathode
 τ_0 = the average time between two collisions
 \bar{v}_x^2 = the mean square of the initial velocity of the electrons in the x direction
 a_x = the acceleration of the electrons in the x direction
 ω = the frequency

The x direction coincides with the axis of the discharge.

The first part of Equ. (1) is the function of only the initial square velocity of the electron, this represents its thermal noise. According to the equipartition law, the average value of the noise energy is

$$\bar{E}_{th} = \frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} k \tau_e \quad (2)$$

where τ_e is the temperature of the discharge and k the Boltzmann's constant. Equ. (2) may be regarded as the definition of the electron temperature.

According to NYQUIST's theorem, the mean square value of the thermal noise current is

$$\bar{i}_{th}^2 = 4k \tau_e G df \quad (3)$$

By combining Equ. (2) and Equ. (3) with the first part of Equ. (1), the conductivity of the gas discharge results:

$$G(\omega) = \frac{e^2 \bar{N} \tau_0 / m d^2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \quad (4)$$

The second part of Equ. (1) gives the spectral distribution of the shot noise of the discharge. The a_x acceleration can be eliminated from this expression by simple physical considerations. In this way the mean square of the noise current is

$$\bar{i}^2 = \left[4k \tau_e G + \frac{4P \tau_0}{\bar{N}} G \left(1 + \frac{2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \right) \right] df \quad (5)$$

and the output noise power:

$$P_N = \frac{1}{4} \frac{\bar{i}^2}{G} = \left[k \tau_e + \frac{P \tau_0}{\bar{N}} \left(1 + \frac{2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \right) \right] df \quad (6)$$

where P is the power dissipated in the discharge. The part giving the thermal noise is the function of the electron-temperature only, while the part giving the shot noise is the function of the dissipated power in the tube (of the tube current) and of the frequency as well.

The foregoing considerations are valid only for homogeneous gas discharge, since the different parts of the gas discharge may have different

electron temperatures. The electron temperatures are generally the function of outside parameters (pressure, conduction current, outside temperature, etc.), except the electron temperature of the positive column. This — according to practice — depends on the quality of the gas only, and is reasonably independent of other parameters.

2. The characteristics of a gas discharge tube placed in a transmission line

Equ. (3) gives the conductivity of the gas discharge. The same result can also be achieved, if instead of considering the thermal fluctuations — as it was done above — the movement of a colliding electron moving in a d. c. and high frequency field is investigated. From these calculations the reactive part of the impedance can be detected, too. In this way the whole impedance is:

$$Z = \frac{md^2}{e \bar{N} \tau_0} (1 + j \omega \tau_0) \quad (7)$$

As the conduction of the discharge is finite, a gas discharge tube placed into a transmission line will act as a lossy conductor or as a lossy dielectric.

Let us consider the propagation of the noise in a transmission line generated by a gas discharge. Moving electrical charges generate electromagnetic waves, the direction of the electrical field is determined by the acceleration direction of the charges. In a transmission line the direction of the electrical field is an unanimous function of the mode of propagation. Therefore, the generated waves will propagate only if the particles have an acceleration component in the direction of the possible electrical field. According to the equipartition law the thermal noise-energy is independent of the axis position of the gas discharge tube. The shot noise power is proportional to the square acceleration, so if we only consider that component, which will propagate in the transmission line, $a_x \cos \vartheta$ should be written in place of a_x in Equ. (1), ϑ being the angle between the axis of the discharge and the direction of the E field. So the maximum noise power propagating in the transmission line is

$$P_{N\tau} = \left[k \tau_e + \cos^2 \vartheta \frac{P \tau_0}{\bar{N}} \left(1 + \frac{2}{1 + \omega^2 \tau_0^2} \right) \right] df. \quad (8)$$

3. Design considerations

When designing noise generators using a gas discharge tube, the following requirements should be met: the noise generator must be placed in such a transmission line through which propagation on the working frequency is possible; the noise generator should not need calibration, *i. e.* the output noise

power should be the function of known physical quantities only and be independent of outside circumstances. By using the above results, the design of the noise generator is already possible.

1. The outside load is to match the inner resistance defined by Equ. (7). (The inner resistance naturally contains a factor depending on the geometry.) The generator matched in this way will not generally match the wave impedance of the transmission line.

2. The plasma is to be coupled to the transmission line alone. Therefore, the position of the gas discharge tube and the attenuation of the plasma, resp., should make possible the attenuation of the additional noises produced by other parts of the tube and by transmission line parts being at ambient temperatures.

3. The axis of the discharge is to form an angle with the electric field-lines which makes the shot noise negligible in respect to the thermal noise, the former being heavily dependent on outside circumstances.

The noise generator fulfilling these requirements will have an equivalent noise temperature equal to the electron temperature with good approximation, which can be determined by measuring physical constants and are known for several gas types [7], [8].

II. Noise generator design

The earlier microwave noise generators were made generally in waveguide form, mainly, because the discharge tube can easily be placed into a line not having an inner conductor. The best type has proved to be the one in which the tube has a tilted position in respect to the E -plane, the angle being approximately 10° [7].

On another type the gas discharge tube was put in the transversal plane, perpendicular to the E -field [2]. The first type fulfills the requirements outlined in Chapt. I.3, while this latter one has much more disadvantages, since matching is done here with separate elements and the attenuation of the plasma is small because of the configuration. Therefore, the effective noise temperature is influenced by those parts of the transmission line which are at room-temperature. (This latter disadvantage can be reduced by terminating the line with reactance, instead of resistive load.)

In the 2000 MC/s band these types are not favourable from the practical point of view. The dimensions of the wave-guides in this band are too big and such a noise generator would be unreasonably large. (*E. g.*: the standard wave-guide dimensions at 2000 MC/s are $109 \times 54,5$ mms. A discharge tube put into this at 10° would be $1/2$ meter long.) Because of the large dimensions only coaxial or other transmission lines using the TEM mode are used in this frequency band. In case of coaxial line it is practically impossible to place the gas

discharge tube in a tilted fashion because of the inner conductor. The other possibility in which the discharge tube faces the magnetic field-lines would also be very difficult to realize in a coaxial line, since this would involve the use of a curved discharge tube.

There is a workable solution for this frequency band published in the literature [9], where a transition is made from the coaxial line to a helical one and the discharge tube is placed into the latter. This solution of the problem meets all the requirements mentioned above, however, its mechanical structure is relatively complicated, and besides, the matching of the transition must be solved in a broad frequency band.

1. The microwave circuit

The noise generator developed by the authors is made of a coaxial line using the TEM mode. The gas discharge tube is used as a lossy conductor and is an integral part of the inner conductor. A schematic drawing is given in Fig. 1.

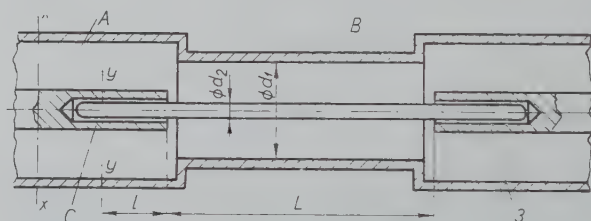


Fig. 1

The noise generator is made of a standard 7/8" coaxial line. The gas discharge tube is placed so that it forms the inner conductor of the coaxial line. Mechanically it is clamped by two conducting sections: "C". Noise is generated by the section "B" of the gas discharge tube.

The "C" sections — as will be shown — can at the same time be used for matching the noise generator. Both d_1 and d_2 diameters are chosen so, that the cut-off frequencies are higher than the working frequency of the noise generator. The filament voltage reaches the tube through a broad band metal extension, not shown on the drawing. The anode of the tube is directly connected to the inner conductor. The output of the generator is at the cathode-side of the discharge tube. The other side of the transmission line may be arbitrarily terminated, *e. g.* by a short circuit. The discharge tube itself contains argon at a pressure equal to 4.5 mms of mercury and mercury vapour. The temperature of such a plasma, according to the literature is 11 500 K° [8].

As regards to matching, the impedances must be checked. From the "x" plane onwards the noise generator can be substituted by the circuit given on

Fig. 2. The length of the transmission line containing the discharge tube is so long, that it can be regarded as being terminated by its characteristic impedance. The shorter line section, "C" is terminated by an open circuit. The cathode side plane of the plasma can with good approximation be regarded

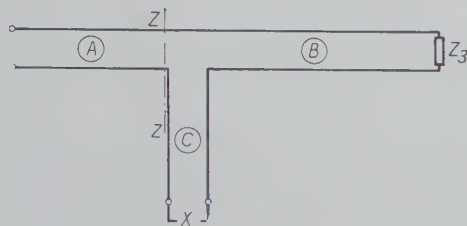


Fig. 2

as the effective plane of the open circuit ("y" plane on Fig 1.), since the resistance of the cathode-fall immediately following this is a great deal higher than that of the plasma.

In the equivalent circuit according to Fig. 2 both "B" and "C" lines contain a separate noise generator (Fig. 3). In Fig. 3 $Z_2 = Z_{02} = R_{02} + jX_{02}$ is the characteristic impedance of the "B" line, $Z_3 = R_3 + jX_3 = Z_{03} \tanh \gamma l$ is the open circuit impedance of the "C" line, if γ is the propagation constant measured in the "C" line, \bar{v}_1^2 and \bar{v}_2^2 are each noise generators with the same electron temperature and R_{02} and R_3 , resp., being the inner resistances of the generators. The voltage sources of the generators — since they are not in correlation with each other — can be squared and added. In this way the inner impedance of the resulting noise generator will be $Z_i = Z_2 + Z_3$ while its electron temperature T_e remains the same. The output power of the noise generator is effectively $\frac{\bar{v}^2}{R_i}$ if the terminating impedance at the "z" plane is

$$Z = Z_i^* \quad (9)$$

This condition can always be fulfilled with the use of proper matching elements, but as has been pointed out before, the generator will not be generally matched to the transmission line, either.

From the point of application it is absolutely essential to have a good match between the noise generator and the transmission line, since the input impedance of the receiver in most cases is equal to the wave impedance of the line, and the noise factor measured depends on the matching of the generator.

It is, therefore, advisable to choose the impedances in such a way that matching between load and generator, and between generator and transmission line, resp., should be simultaneously fulfilled. In the equipment under discussion this is possible even without any additional matching elements. This is

because the inner resistance of the generator — between certain limits — can be freely chosen. If the impedances of the two generators on Fig. 3 are chosen in such a way that their sum is real and equal to the wave impedance of the 7/8" line, than the above requirement is fulfilled. The match should be realized so that the following will be valid:

$$R_{02} + R_3 = Z_{01}; \quad X_{02} = -X_3 \quad (10)$$

By making proper choice of dimension "L" on Fig. 1, the attenuation of the plasma can be kept high enough to have those noises arbitrarily well attenuated which originate at the line terminating impedance and at the anode side of the discharge tube, resp., both being noises at different temperatures than T_e .

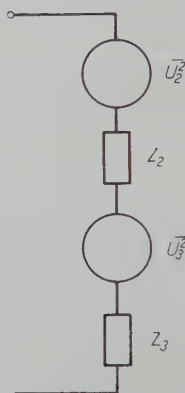


Fig. 3

The attenuation of the undesired noises originating on the cathode side depend on the l dimension of the plasma. According to the above reasoning the length l cannot be freely chosen, in practice, however, the length necessary for the matching gives enough attenuation.

It follows from Equ. (8) that the shot noise, which is proportional to $\cos^2 \vartheta$ is in first approximation not present at all, since the discharge tube is perpendicular to the electrical field. In practice, however, the finite conductivity of the plasma results in a small axial E component, but the shot noise thus generated is negligible beside the thermal noise.

2. The D. C. circuit

The D. c. circuit of the noise generator is made in the usual way and is shown on Fig. 4.

The D. c. voltage-drop on the discharge tube is in the order on 50–100 volts, the ignition voltage is appr. 1000 volts. It is advisable to generate the relatively high ignition voltage at the moment of ignition only. In the circuit

shown on Fig. 4 this is realized in the following way: by closing and then opening switch K , there appears a high-voltage pulse on the L inductance (its value being appr. 10 henries), which then ignites the tube. By changing the limiting resistor, R , it is possible to set in the necessary tube current. There is no need for good filtering of the supply voltage, since the fluctuation of the current does not produce a change in the noise temperature [7]. The anode point is grounded, as it is connected with the transmission line.

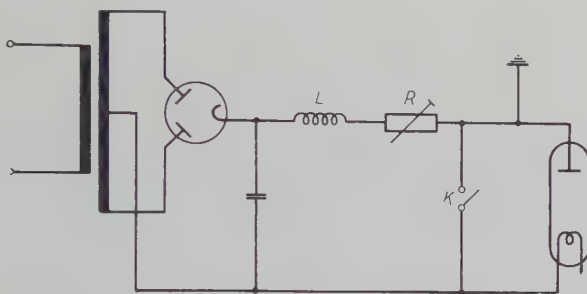


Fig. 4

3. Measurement results

The following measurements were made: checking the match of the noise generator, measuring the noise power and the attenuation of the line section containing the plasma. The working frequency band was 1800–2200 MC/s.

If an uncertainty of .5 db is permitted on measuring the noise figure, then the voltage standing wave ratio caused by the noise generator does not exceed the $r = 2$ value. Six tubes were checked; Table I contains the average values of the measurements.

Table I

VSWR as a function of anode current and frequency

f kMC/s	1,8	1,85	1,9	1,95	2,0	2,05	2,1	2,15	2,2
100	2,15		1,77		1,84		1,9		2,4
125	2,05	2	1,72	1,77	1,64	1,77	1,74	2	2,05
150	2,06	1,9	1,74	1,69	1,61	1,68	1,77	1,82	1,86

The dependence of the output noise power on the tube current was measured with a receiver having a mixer input stage, its i. f. being 30 MC/s, the bandwidth 4 MC/s. A self-compensating, a. c. thermistor bridge was used as

a detector. Table II shows the average data obtained from the six tubes. The difference of the noise powers of the six tubes was within 5 db. Above 120 mA anode currents, no output variation of the noise power could be detected.

Table II

The output noise power as a function of the tube current

I_{mA}	80	100	120	140	160
P_n degrees	29	29,5	30	30	30

By comparing the results of these two measurements, it was found, that the noise generator works best at 150 mA anode current, therefore, this current was chosen for working current.

The output of a noise generator working with 150 mA was compared with that of a microwave signal generator. The deviation of the measured value from the expected one was within 5 db.

With one of the tubes the attenuation of the noise generator was measured as a function of frequency and anode current. Table III shows the results.

Table III

The attenuation in db of the noise generator as a function of anode current and frequency

I_{mA}	100	125	150
1,9	24,5	21	18
2,0	24	20,5	18
2,1	22	19	18
2,2	17	15	15

4. Conclusions

The microwave noise generator discussed in the article has small dimensions, it is simple and easy to operate. The output noise power depends only on the noise temperature of the plasma. Its advantage over the helical line or wave-guide types is, that no special, additional matching elements are required.

If the gas discharge tube is inactive, the noise generator does not match the connecting transmission line. This is rather an inconvenience than a disadvantage. The described noise generator can be used theoretically in a very broad band with the use of proper matching elements.

Summary

The paper discusses the design of a microwave noise generator applied to a coaxial line, using a gas discharge tube. The gas discharge tube is built into the inner conductor of the coaxial line. It is theoretically proved that the noise power of the generator is the function of the noise temperature of the electrons alone.

References

1. VAN DER ZIEL: Noise, Prentice Hall Inc. 1954, 60.
2. MUMFORD: Bell Syst. Techn. Journ. **28** 608 (1949).
3. VAN DER ZIEL: loc. cit. 63.
4. MONTGOMERY: Techn. of Microwave Measurements, MIT Radiation Laboratory Series, Vol 11. McGraw-Hill Book Company Inc. 1948 274.
5. MONTGOMERY: loc. cit. 278.
6. VAN DER ZIEL: loc. cit. 323.
7. JOHNSON—DE REMER: Proc IRE **39** 908 (1951); J. Brit. IRE 15. (1955).
8. EASLEY—MUMFORD: J. Appl. Phys. **22** 846 (1951).
9. KOLLÁNYI, J.: Brit. IRE 17 541 (1957).

G. ALMÁSSY |
I. FRIGYES } Budapest XI. Sztoczek u. 2. Hungary

THE CHARACTERISTICS OF HOMOGENEOUS NEUTRON AMPLIFIERS

By

G. FODOR

Institute for Theoretical Electricity, Polytechnical University, Budapest

(Received March 11, 1960)

1. Introduction

In a former publication [1] we examined some questions connected with the amplification factor and calculation of multiplier systems functioning as a neutron amplifier. In the present work numerical results are published on the amplification factor and costs of homogeneous amplifiers of simple construction. The meaning of the symbols used later, see [1].

Of the amplification factors defined in several ways, two will be emphasized as especially characterizing ones. The one is the *thermal amplification factor* :

$$K_T = \frac{1}{Q} \int_V \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV = \frac{P}{k-1} K. \quad (1)$$

The other is the *fission amplification factor* :

$$K_F = \frac{1}{Q} \int_V \nu_0 \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV = \frac{k}{k-1} K \quad (2)$$

where K is the *normalized amplification factor*.

Further the concept of the *degree of criticality* was introduced:

$$s^3 = \frac{M}{M_0} = \frac{V}{V_0}. \quad (3)$$

Another, though less usable, characteristic of the state of criticality is *negative reactivity*:

$$-\rho = \frac{1 - k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}}, \quad k_{\text{eff}} = k \frac{e^{-B^2 \tau}}{1 + B^2 L^2} \approx \frac{k}{1 + B^2 M^2}. \quad (4)$$

A further characteristic of the amplifier is its *cost* (Z), what is in essence equal to the cost of the fissionable material consumed and eventually of the moderator. Cost is a better parameter than the quantity of the material consumed, because in this way the influence of *e. g.* enriched uranium and of heavy water can be examined.

By a prescribed degree of criticality, several designs with different amplification factors and costs, in function of material composition and geometry, were arrived at. The best characteristic curve of the amplifier plots just the amplification factor in function of necessary costs. On comparing two amplifiers, evidently that one is regarded more advantageous, which ensures a higher amplification factor by equal costs or by which lower costs are necessary to obtain the same amplification factor.

It was stated that in the near-critical state of the system the various approximative calculation methods produce results not differing greatly. In the followings, therefore, calculations will be carried out on the basis of the one or two-group approximation. To make results more easy to survey, further neglects are generally applied.

It was supposed that the value of τ and of the diffusion coefficients D_T and D_F is not influenced by the dilution of fuel. Namely calculations would be complicated by taking into account this effect, too, and results are influenced by small corrections only negligibly.

It should be kept in mind, that the results of the one or two-group calculation can only be regarded as informative values. If the moderator is water, the error is particularly high. Consequently our results, as listed in the following, are qualitatively right, but their numerical value should be corrected by measurements.

2. Bare spherical amplifier

In the cited paper, the distribution of neutron flux in the homogeneous, bare spherical system, with the source being in the centre, was calculated. For the normalized amplification factor the value

$$K = \frac{\kappa R}{\sin \kappa R} - 1. \quad (1)$$

It is characterized by the fact of growing infinite, if $\kappa R = \pi$, that is, if the radius of the system is equal with the

$$R_0 = \frac{\pi}{\kappa} = \pi \frac{M}{\sqrt{k-1}} \quad (2)$$

critical radius. If the system is in a near-critical state, so

$$R = s R_0 = (1 - \varepsilon) R_0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3)$$

$$K = \frac{(1 - \varepsilon) \pi}{\sin \varepsilon \pi} - 1 \approx \frac{1 - 2\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (4)$$

In case of $\varepsilon < 0,08$ ($s > 0,92$, $s^3 > 0,78$), the approximation means an error of less than 1 p. C. In the critical state the limit value of the ε K expression is:

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon K = 1. \quad (5)$$

It is known that the prescription of the degree of criticality means a determined negative reactivity. In one-group approximation, according to [1 (5.11)] approximately

$$K = \frac{k-1}{k} - \frac{2}{-\rho} - \frac{1}{2}, \quad (6)$$

where the first member is much greater than the second. In the critical condition:

$$G^* = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-\rho K) = 2 \frac{k-1}{k}. \quad (7)$$

The expression for the fission amplification factor in case of a small negative reactivity:

$$K_F = \frac{k}{k-1} K \approx \frac{2}{-\rho}. \quad (8)$$

In connection with expression (8) the following should be noted. In the literature the following line of thought is often met with. Let us place into a system, having an effective multiplication factor k_{eff} , a neutron source of Q intensity. At the end of the first neutron cycle $k_{\text{eff}}Q$ fast neutrons are produced. During the second neutron cycle, beside the Q source neutrons and the multiplied $k_{\text{eff}}Q$ neutrons, the k_{eff} -fold of the previously multiplied $k_{\text{eff}}Q$ neutrons, i. e. k_{eff}^2Q neutrons are produced, and so on. The limit value of the number of neutrons in the system is:

$$Q_F = Q + k_{\text{eff}}Q + k_{\text{eff}}^2Q + \dots = \frac{Q}{1 - k_{\text{eff}}} \approx Q \frac{1}{-\rho}, \quad (9)$$

if $k_{\text{eff}} < 1$.

Using the other way (8) means a number of neutrons which is just the double of those obtained by the above reasoning. This is, however, incorrect, because the multiplication of the number of neutrons during an effective neutron cycle is given by the k_{eff} effective multiplication factor, if neutrons are produced by fission, that is the distribution of source intensity is determined by neutron distribution. If, however, as in the present case, there are extraneous sources, then not the k_{eff} value characterizes their multiplication. The number of fast neutrons produced at the end of the first neutron cycle is k_1Q , where k_1 is a function of the effective multiplication factor and naturally of

the position of the source, too. The $k_1 Q$ neutrons are again multiplied at the end of the second neutron cycle, what is characterized by multiplication factor k_2 , for the calculation of which we should have to know neutron distribution, immediately before the second fission act. The same can be said of the succeeding processes, consequently the limit value of the number of produced fast neutrons is:

$$Q_F = Q + k_1 Q + k_1 k_2 Q + k_1 k_2 k_3 Q + \dots \quad (10)$$

Neutron distribution as a limit value is not influenced by the position of the extraneous source, consequently

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k_{\text{eff}}. \quad (11)$$

Practically, this situation already arises after a few neutron cycles. Let us suppose that $k_n = k_{\text{eff}}$, if $n \geq 3$, so

$$Q_F = Q \left[1 + k_1 + \frac{k_1 k_2}{1 - k_{\text{eff}}} \right]. \quad (12)$$

From expression (9) the conclusion is drawn that in the case of $k_{\text{eff}} \rightarrow 1$ the inverse value of the C counting rate, that can be measured proportionally with the Q_F number of neutrons, approximates zero. This is true, however, according to (12), in the general case too, as

$$\frac{1}{Q_F} = \frac{1}{Q} \frac{1 - k_{\text{eff}}}{(1 + k_1)(1 - k_{\text{eff}}) + k_1 k_2} \rightarrow 0, \text{ if } k_{\text{eff}} \rightarrow 1. \quad (13)$$

It is evident that this limit value is independent of the number of neutron cycles after which neutron distribution becomes independent of the position of the source.

3. Bare cylindrical amplifier

Let us examine the influence of the geometry of the equipment on the expression of the amplification factor. For this purpose the amplification factor is determined for a cylindrical arrangement the (extrapolated) radius and half-height of which are R and H , respectively, and the point-like neutron source is at the centre. By one-group approximation the following expression is obtained for normalized amplification factor:

$$K = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \kappa_n H}{\xi_n J_1(\xi_n) [1 - (\xi_n / \kappa R)^2] \cos \kappa_n H}, \quad (1)$$

where J_0 and J_1 are the Bessel functions of the first kind and of the zero and first order, respectively. $J_0(\xi_n) = 0$, further

$$\kappa_n^2 = \kappa^2 - \left(\frac{\xi_n}{R}\right)^2 = \frac{k-1}{M^2} - \left(\frac{\xi_n}{R}\right)^2. \quad (2)$$

The radius R is regarded as a given value because in this way the boundary condition is fulfilled. The critical half-height pertaining to the given radius is:

$$H_0 = \frac{\pi}{2\kappa_1} = \frac{\pi}{2} \frac{R}{\sqrt{(\kappa R)^2 - \xi_1^2}}, \quad R > \frac{\xi_1}{\kappa}. \quad (3)$$

In case of a given material composition, the volume and simultaneously the costs have minimum values, if

$$R = R_m = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\xi_1}{\kappa}} = \frac{2,94}{\kappa}, \quad H_0 = H_{0m} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2\kappa} = \frac{2,72}{\kappa}, \quad (4)$$

as is known from reactor technics.

If the amplifier is in near-critical condition, so the higher members of the infinite series under (1) beside the first member can be neglected. The radius can be written in the following form: $R = \lambda R_m$ and so:

$$K = \frac{1,6}{1 - (2/3 \lambda^2)} \frac{1 - \sin(1 - s^3) \pi/2}{\sin(1 - s^3) \pi/2} \approx \frac{1,02}{1 - (2/3 \lambda^2)} \frac{1}{1 - s^3}. \quad (5)$$

In the case of minimum volume $\lambda = 1$, further $1 - s^3 \approx 3 \varepsilon$, therefore

$$K_m \approx \frac{1,02}{\varepsilon}, \quad (6)$$

which is 2 p. C. higher than expression (2.4) deduced for a sphere. If $\lambda < 1$, so the value for K will be higher.

By expressing amplification factor with reactivity, in linear approximation

$$K = \frac{k-1}{k} \frac{2,04}{-\rho} + 1,02 \frac{1}{1 - (2/3 \lambda^2)}. \quad (7)$$

Somewhat different expressions are obtained for maximum volume, if negative reactivity is regarded as given at the outset.

4. The effect of reflector

The calculation of reflected systems is generally a difficult task, because the one-group approximation is very rough. In the following the simplest case is examined: a sphere of radius R is surrounded by a reflector of infinite thick-

ness, the material of which is identical with that of the moderator in the active zone.

By calculating with the two-group approximation, with the usual neglect ($\mu^2 \ll \nu^2$, $\nu R \gg 1$), the normalized amplification factor will be:

$$K = \frac{\mu R + u}{\sin \mu R + u \cos \mu R} - 1, \quad (1)$$

where

$$u = \mu L_0 \frac{1 + \nu \sqrt{\tau} + \beta_0 \sqrt{\tau}/L_0}{1 + \nu \sqrt{\tau} + \beta_0}, \quad (2)$$

$$\beta_0 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 + \beta/\gamma}{1 - \alpha/\gamma} (1 + \nu L_0). \quad (3)$$

The critical dimension from (1):

$$R_0 = \frac{\pi}{\mu} - \frac{1}{\mu} \arctg u = \frac{\pi}{\mu} - T, \quad (4)$$

where the value T is the reflector savings. The limit of the $(1-s)$ K expression is:

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon K = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \left[1 + \frac{u}{\pi - \arctg u} \right]. \quad (5)$$

The correlation between the degree of criticality and negative reactivity is hardly influenced by the reflector.

The limit value for expression $(- \varrho K)$ is:

$$G^* = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (- \varrho K) = 2 \frac{k-1}{k} \left[1 - \frac{1}{\pi} \arctg u \right]. \quad (6)$$

The limit value of fission amplification is proportional to $(-1/\varrho)$.

5. Material characteristics

To illustrate the above and following calculations, let us examine the variation of the amplification factor and of costs in the following case:

1. Fuel is uranium, enriched to 20 p. C., the world price of which is $3,22 \cdot 10^3$ dollars/kg. Fuel is diluted in the moderator in the form of uranyl sulfate (UO_2SO_4).

2. The moderator is common water.

The ratio of fuel and moderator is characterized by dilution g :

$$g = \frac{N_0}{N_U}, \quad (1)$$

where N_0 and N_U is the number of water and uranium atoms, respectively, in 1 cm³.

3. If no other data are given, the actual active volume is 90 p. C. of the critical volume, i. e. $s^3 = 0,9$ ($s = 0,9655$).

4. For fuel diluted in heavy water we give no results. According to our examinations not published here: heavy water is less advantageous than common water, both in respect to amplification factor and costs. In special arrangements, however, also heavy water is applied. The world price of heavy water is about 60 dollars/kg.

5. The cost of the source is left out of calculations, because it is much lower than the other costs.

6. Some numerical results

In the enclosed diagrams the results of our calculations are listed. The following arrangements were examined (letter markings in accordance with those on the various curves):

- a) Bare sphere.
- b) Bare cylinder, $R = R_m$.
- c) Bare cylinder, $R = 0,9 R_m$.
- d) Bare cylinder, $R = 0,85 R_m$.
- e) Sphere with a reflector of infinite dimensions, where R_m is the radius ensuring minimum volume.

On Figs. 1 and 2 the critical radius of the spherical system and the critical dimensions of the cylindrical arrangement are plotted in function of dilution. On Figs. 3 and 4 amplification factors K_T and K_F , respectively, are plotted in function of dilution in case of $s^3 = 0,9$. The curves for cases a) and b) are practically identical. On Fig. 5 the costs of uranium are shown. Costs have a minimum value in the range $g = 60-80$.

Amplification factors depend on the degree of criticality s only through the normalized amplification factor. The $\varphi(s)$ curves shown on Fig. 6 are identical with K in the case of a bare sphere, while for the case of a cylinder

$$\varphi(s) = 3 \left(1 - \frac{2}{3\lambda^2} \right) K(s). \quad (1)$$

With the help of the diagram, amplification factors shown on Figs. 4-5 can be easily calculated for other degrees of criticality. Costs are simply in proportion with the s^3 value.

With the help of Figs. 3-5 the best characteristic of the amplifier can be determined: amplification factor in function of costs. This is shown for the examined cases on Figs. 7 and 8. On the basis of these the following statements can be made. Relatively small amplification factors ($K_T < 200$, $K_F < 300$)

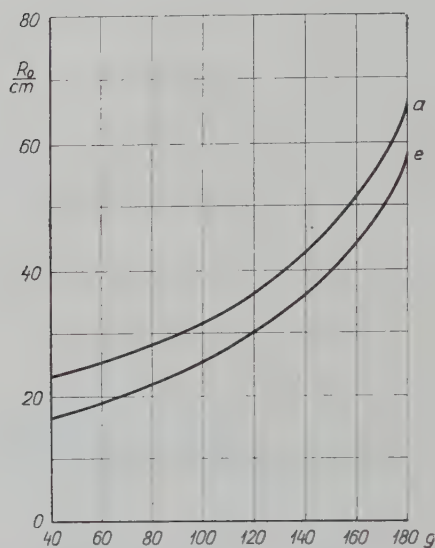


Fig. 1. Critical radius of the bare and reflected sphere in function of dilution.
Curve "a": Bare sphere. Curve "e": Sphere with infinite reflector

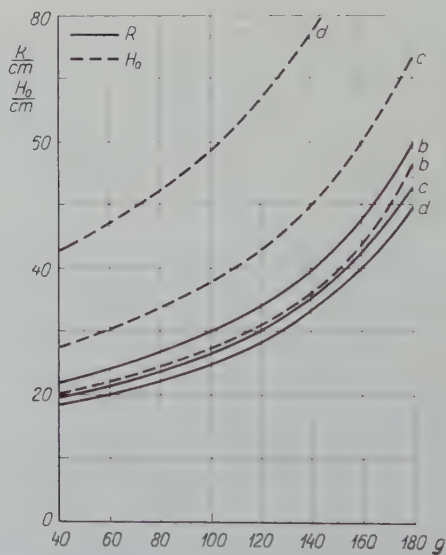


Fig. 2. Critical radius and critical half-height of the bare cylinder in function of dilution.
Curve "b": $R = R_m$. Curve "c": $R = 0.9 R_m$. Curve "d": $R = 0.85 R_m$

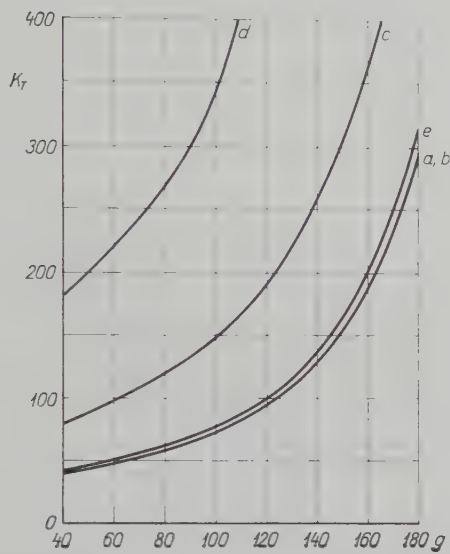


Fig. 3. K_T thermal amplification factor in function of dilution

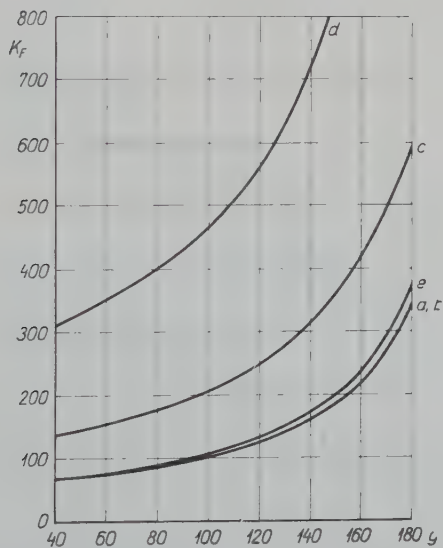


Fig. 4. K_F fast amplification factor in function of dilution

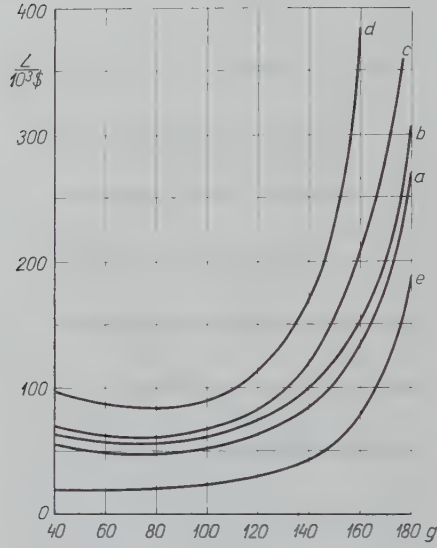


Fig. 5. Costs Z of consumed uranium in function of dilution

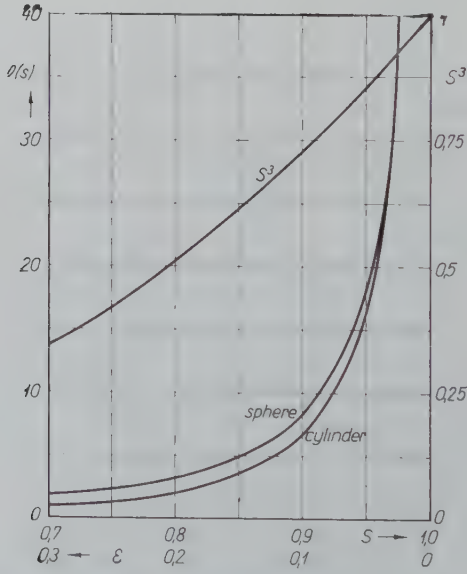


Fig. 6. The function $\varphi(s)$ which characterizes the dependence of the amplification factor of the degree of criticality

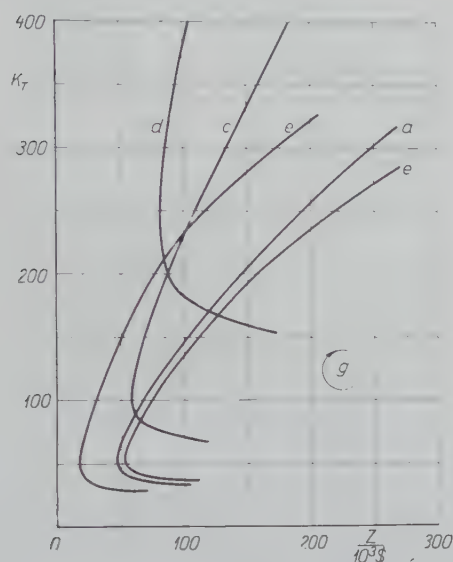


Fig. 7. Thermal amplification factor in function of costs

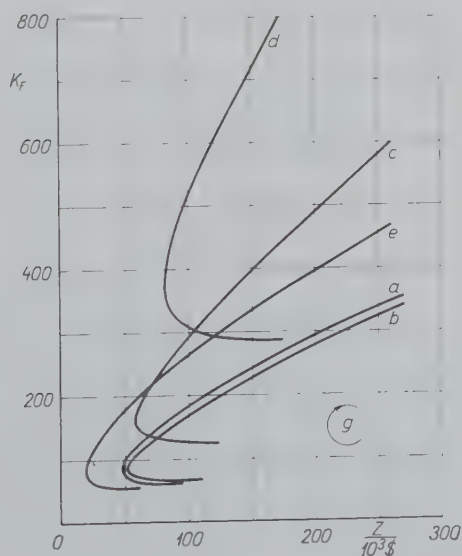


Fig. 8. Fast amplification factor in function of costs

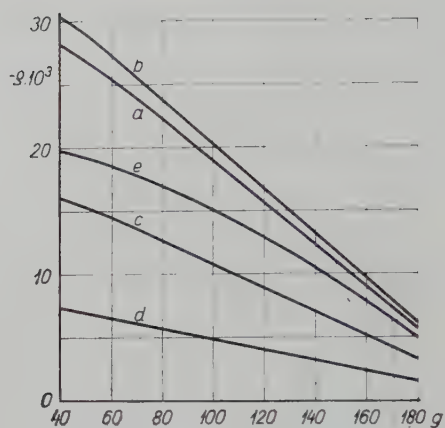


Fig. 9. Negative reactivity in function of dilution

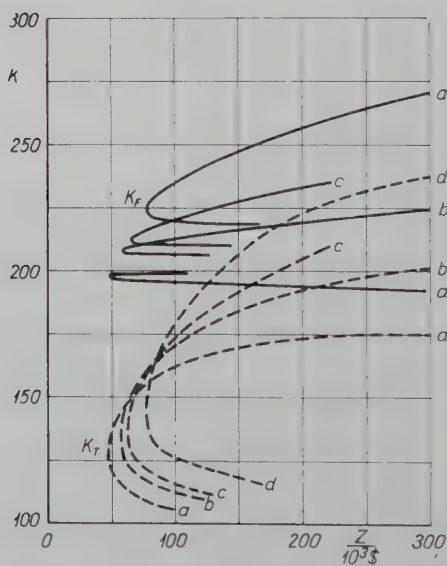


Fig. 10. The characteristics of neutron amplifiers in case of constant negative reactivity ($\rho = -0,01$)

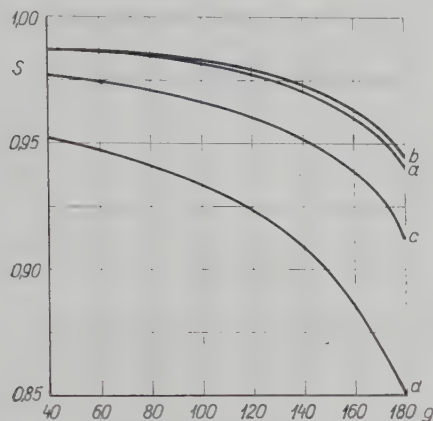


Fig. 11. Degree of criticality (s) pertaining to a negative reactivity of $\rho = -0.01$, in function of dilution (g)

can best be achieved by a reflected spherical amplifier. Further, the bare spherical amplifier is somewhat better than the bare cylindrical one, as costs pertaining to a given amplification factor are steadily growing in the said order. Amplification factors higher than the mentioned ones are advisably realized rather by longer cylinders than by a sphere for which dilution differs from the value ensuring minimum costs. In general, the solution ensuring minimum costs can always be found for any given amplification factor.

On Fig. 9 negative reactivity in function of dilution is shown. On Fig. 10 the characteristic of the amplifiers is shown for the case, when $\rho = -0.01$, a constant. The characteristics are similar to those on Figs. 7 and 8, where the degree of criticality was constant. On Fig. 11 the values of s are still plotted in function of g , if $\rho = -0.01$.

7. The application of an inner reflector

In the following the question will be examined as to whether the amplification factor pertaining to a given cost can be increased by the application of special arrangements. The more or less evident result should, however, be mentioned, in advance, that only systems with a cost higher than the minimum can in this way be made. The amplification factors of these, however, are higher than in the case when increased costs are brought about by altering the dilution pertaining to the minimum cost.

The first special arrangement examined is the following: To ensure a better neutron economy, the source is not placed immediately into the active zone, but is surrounded by a moderator layer (Fig. 12). Consequently, fast source neutrons arrive into the active zone more or less slowed down, whereby the average resonance escape probability is increased.

Calculation is carried out for the case when there is no outside reflector (on Fig. 1. $c = 0$). For calculation purposes dimension a is given various values and characteristics plotted with the help of this parameter. If common water is used for both solvent and moderator, then it is evident that dimension of the inside reflector should not be more than some cm-s, because in case of an

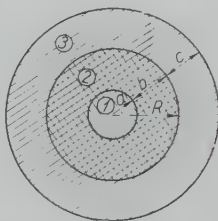


Fig. 12. Spherical amplifier with inner reflector. 1 and 3: moderator. 2: active zone

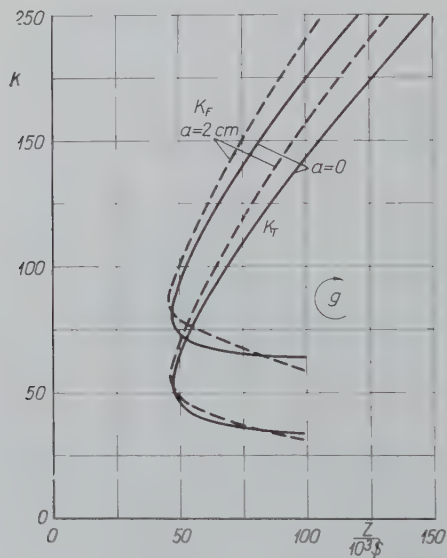


Fig. 13. Influence of the inner reflector on the characteristics

excessively great dimension thermal neutrons are intensively absorbed by that layer. Our previous examinations, in turn, have shown that the use of heavy water means a considerable cost increase.

It is evident from the characteristics (Fig. 13), that conditions are improved by using a 1–2 cm thick reflector only to a very small extent. However, because of technological difficulties the application of this method is not worth while.

8. Two-layer arrangement

The value of both the thermal and the fission amplification factor can be increased by increasing the dimensions of the active zone. As the degree of criticality is prescribed, the dimension of the active zone can only be increased if its critical dimension is somehow also increased. One possible way of increasing the critical dimension is the arrangement of absorbents in the fissionable material. By a spherical arrangement *e. g.* a sphere surface can be formed of a thin cadmium layer which divides the active zone into two parts (Fig. 14). It was supposed during calculations that thermal neutrons are completely absorbed by the absorbent layer, however, it is of no influence at all on fast neutrons.

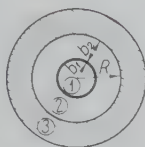


Fig. 14. Two-layer arrangement

1 and 2: active zone, 3: reflector, between 1 and 2: absorbent layer

The arrangement of the absorbent layer naturally does not increase the amplification factor unequivocally as the distortion of the flux has a diminishing effect. Beyond this, increasing the dimensions of the active zone increases costs, too. As a last result, only detailed examination can decide, whether there is an optimum b_1 dimension and g dilution which ensures more advantageous conditions by a one layer arrangement.

Calculations were carried out for the unreflected case. The following relationship for the normalized amplification factor was obtained:

$$K = \frac{\beta_0 \mu b_1 \sin \mu b_2 + \mu b_1 + \mu b_2}{\beta_0 \sin \mu b_1 \sin \mu b_2 + \sin \mu (b_1 + b_2)} - 1, \quad (1)$$

$$\beta_0 = 2 \frac{\nu}{\mu} \frac{\beta}{a}. \quad (2)$$

If dimension b_1 (or b_2) is given, critical dimension b_{20} (or b_{10}) can be calculated from the following equation:

$$- \operatorname{tg} \mu b_{20} = \frac{\operatorname{tg} \mu b_1}{\beta_0 \operatorname{tg} \mu b_1 + 1} = u. \quad (3)$$

It should be noted that relationship (1) arose under the supposition that $\nu b_1 \gg 1$ and $\nu b_2 \gg 1$. If b_1 or b_2 are very small this supposition is not fulfilled. If $b_1 = 0$, the absorbent layer disappears. If in turn $b_2 = 0$, thus the absorbent

layer is moved to the boundary surface of the system. In both cases the solution has to change into relationship

$$K = \frac{\mu b}{\sin \mu b} - 1 \quad (4)$$

deduced directly for the bare sphere. By examining expression (1) we can see that in case of $b_1 = 0$ and $b_2 = 0$, respectively, it is actually transformed into

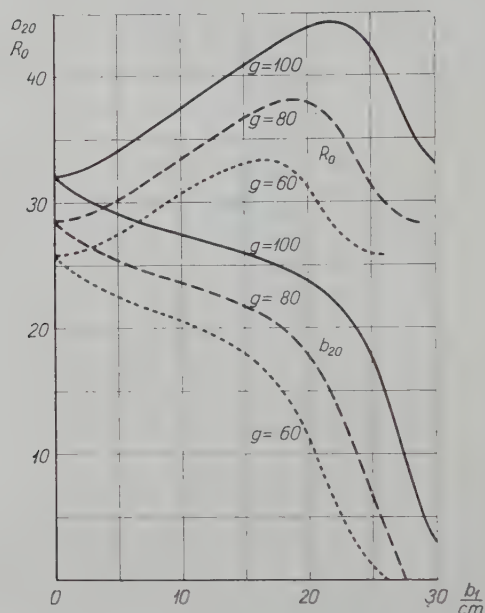


Fig. 15. Critical dimensions of the two-layer arrangement in the case of constant dilution

equation (4). The expression given under (1) can therefore be regarded as a good approximation for both low and high values of νb_1 and νb_2 .

The expression for G can again be formed:

$$G = \frac{\beta_0 \mu b_1 u + (\mu b_1 + \arctg u) \sqrt{1 + u^2}}{[-\beta_0 \sin \mu b_1 - \cos \mu b_1 + u \sin \mu b_1] [\mu b_1 - \arctg u]} \quad (5)$$

In the case of $b_1 \rightarrow 0$, $u \rightarrow (-0)$; while in the case of $\mu b_1 \rightarrow \pi$, $u \rightarrow (+0)$. In both cases $G \rightarrow 1$.

On Fig. 15 critical dimensions are plotted in function of b_1 for uranyl sulfate diluted in water. For the various curves the $g = N_0/N_U$ dilution value is given. Only the $g = 60, 80, 100$ dilution values were examined. It is evident from Fig. 15 that the radius of the active zone has a maximum in the case

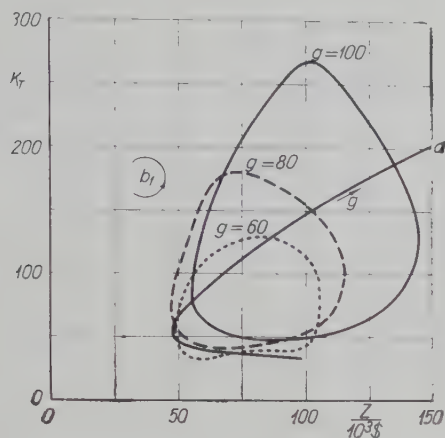


Fig. 16. Characteristics of the two-layer arrangement for the thermal amplification factor

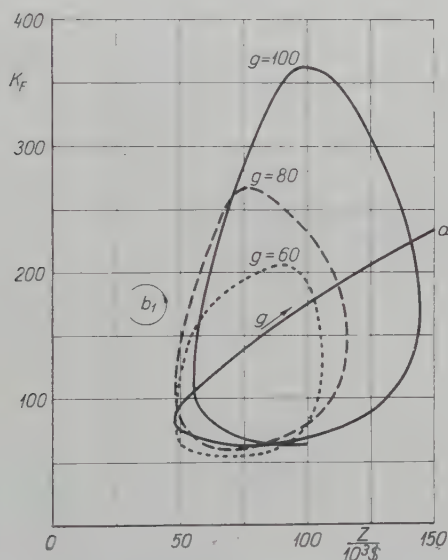


Fig. 17. Characteristics of the two-layer arrangement for the fission amplification factor

of a precisely determined b_1 dimension. Values b_1 and b_2 can be exchanged on the figure — as evident from (3).

This exchangeability, however, is not valid for the amplification factor as well. In the followings dimension b_1 will be regarded as an independent variable, this ensuring a higher amplification factor.

On Figs. 16 and 17 the characteristics of the thermal and fission amplification factor are plotted for three g values. As the cases $b_1 = 0$ and $b_2 = 0$ mean the same physical arrangements, closed curves are obtained. But only

the left half of these is of interest. This curve section pertains to high b_1 values as can be read from Fig. 18. For the sake of comparison the corresponding characteristic of the bare spherical system is also shown on the diagrams. It can be read of the diagram that the maximum amplification factor of the two-layer arrangement is about the double of that of the one-layer arrangement, costs being identical. The characteristic of the amplifier is, therefore, advantageously influenced by this method, its effect is sensible, however, only with costs higher than minimum.

This method can be further developed by increasing the number of layers on the one hand and by the use of reflector on the other hand.

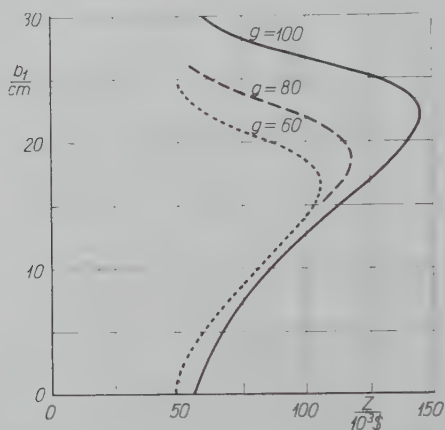


Fig. 18. Correlation between costs and dimension b_1 in the two-layer arrangement

9. Convergatron

The principle of convergatron was raised, in a short paper [2], where only slab arrangements were discussed and along lines different from those of the present paper. The basic principle of the convergatron can be formulated as follows: neutrons leaving a neutron amplifier may act as a high-intensity neutron source for the next amplifier. By connecting such units in series, the amplification factor as related to the original source intensity can be increased at will. At the same time this means that neutron flux and power will also be higher and higher in the stages following one another. Actually, the two-layer system discussed previously can also be regarded as such an arrangement. However, this method cannot be applied forthwith, because it is not enough that the various stages are subcritical but the complete system should also be in a subcritical condition. The problem can be formulated in other words, too: neutrons pass, not only from the first stage into the second, but they are "fed back" from the second system into the first one. If this effect

can be prevented, the various stages can be examined separately, which means a considerable easing in calculation technique.

According to [2] the task can be solved as follows (Fig. 19): One stage consists of three parts: an active zone, a thermal absorbent surrounding the active zone, and a moderator zone. From the active zone only fast neutrons pass into the moderator. A part of the neutrons is returned into the active zone, another part is absorbed in the moderator, the remaining neutrons pass into the 2. active zone, where a chain reaction is started. Essentially all the neutrons leaving the 2. active zone arrive to the boundary of the 1. zone slowed down, if the dimension a of the moderator is suitably chosen. At the boundary, neutrons are absorbed by the absorbent layer, consequently there is practically no feed-back. A similar process takes place in the following stages.

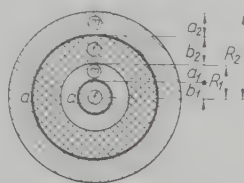


Fig. 19. Convergatron arrangement. f) fuel, m) moderator, a) absorbent layer

The thickness of the moderator should be as high as possible, on the one hand, so as to prevent feed-back in any case. On the other hand, moderator dimensions cannot be increased excessively, because otherwise direct coupling is decreased on account of absorption. Dimension a should fulfill the following unequation:

$$\sqrt{\tau_0} \ll a \ll L_0. \quad (1)$$

From which follows that only such materials can be used as moderator, for which $\sqrt{\tau_0} \ll L_0$. The only such moderator is heavy water ($\sqrt{\tau_0} = 11$ cm, $L_0 = 123$ cm). According to relationship (1) the thickness of the moderator layer was chosen at 40 cm.

Calculation procedure was the following: As a first step, the reflector surrounding the active zone was regarded as infinite. As the second step, the system 1. moderator — 2. active zone — 2. infinite moderator was calculated. In this case at position $r = b_1$, $\Phi = 0$, while the values for Ψ and J_F are identical with results of the preceding calculation. The last mentioned two conditions mean a redundancy, but differences obtained with the help of the two conditions can be neglected by suitably choosing dimensions. The calculation of the third and higher stages can be carried out by simply changing symbols.

To reduce dimensions and costs, water was chosen as moderator in the active zone, however, this makes the fulfilment of boundary conditions more

complicated. To make results more easy to survey, many mathematical approximations were used.

For the normalized amplification factor and critical dimensions we get rather complicated expressions. They are not given here because of lack of space. The numerical results are given on Fig. 20, where the lower curves represent the characteristics of a simple reflected amplifier, while the upper ones that of a two-stage convergatron. It can be seen that to achieve amplification factors higher than 1000 (by $s^3 = 0,9$) the use of the convergatron is more economical. At the same time, even the less expensive convergatron costs

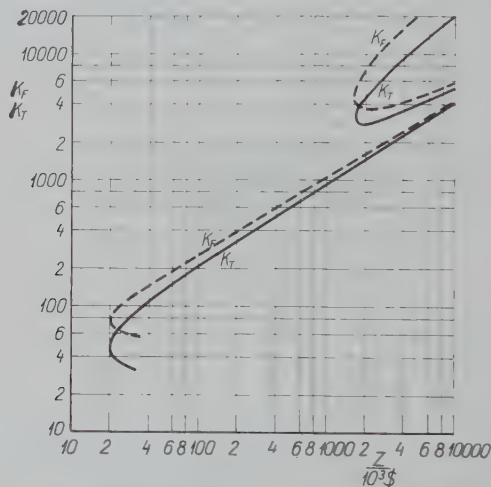


Fig. 20. Comparison of the characteristics of the convergatron and of the reflected spherical amplifier

more than one million dollars, while the amplification factor is still so low that by this arrangement *e. g.* no energy can be produced. By increasing the number of stages both amplification factor and costs rapidly increase.

The amplification factor either of the convergatron or of the other arrangements can be raised by increasing the degree of criticality, as in the near critical condition K is proportional to $1/\epsilon$. If in place of $s^3 = 0,9$ the value of $s^3 = 0,99$ is allowed, so costs rise only 10 p. C., while the amplification factor is increased 2,15 fold. On the other hand a system being on the border of criticality is to be equipped with protecting devices similar to a critical reactor. Consequently, every advantage of the subcritical system is lost thereby.

10. Summary

Along principles laid down in paper [1] the data and characteristics of various simple homogeneous neutron amplifiers were calculated: amplification factor in function of costs. For every arrangement there is a dilution value ensuring minimum costs. From certain points of view this can be regarded as an optimum condition. Amplification factor can be

increased partly by suitably chosen geometry, partly by using more-stage systems. By these methods, however, minimum costs rise in respect to the spherical or cylindrical arrangement, consequently their use is generally not practical.

Literature

1. FODOR, G.: Definition and Calculation Methods of the Amplification Factor of Neutron Amplifiers. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* Vol. IV. No. 3. p. 20—226. (1960).
 2. BORST, L. B.: The Convergatron, a Neutron Amplifier. *Phys. Rev.* Vol. **107** No. 3. p. 905—906 (1957).
 3. *Reactor Handbook: Engineering*; U.S.A. Geneva, 1955.
- More detailed literature see in [1].

G. FODOR, Budapest XI. Budafoki út 6—8. Hungary.

ÜBER DIE FELDSTÄRKE EINER FLÄCHENLADUNGSSCHICHT

Von

T. FREY

Lehrstuhl für Mathematik an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Februar 1960)

1. Einleitung

Betrachten wir ein stückweise glattes, von *Jordan*-Kurven begrenztes, gerichtetes Flächenstück F , bedeckt mit der integrierbaren Flächenladungsdichte $\sigma(r)$. Bekanntlich wird das Potentialfeld dieser Ladungsschicht durch das Integral

$$U(\mathbf{r}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} d\mathbf{f}_{\varrho} \quad (\mathbf{r} \notin F) \quad (1.1)$$

angegeben. Bekannt ist ferner, daß dieses Integral einen eindeutig bestimmten Grenzwert besitzt, falls \mathbf{r} dem $\varrho \in F$ zustrebt. Für $\mathbf{r} \notin F$ kann man die Feldstärke — u. zw. durch Tausch der Reihenfolge des Differenzierens und Integrierens zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} d\mathbf{f}_{\varrho} = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho) \cdot (\mathbf{r} - \varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|^3} d\mathbf{f}_{\varrho} \quad (1.2)$$

schreiben.

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ besitzt im allgemeinen keinen Grenzwert für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F$. Auch zweiseitige Grenzwerte hat \mathbf{E} nur unter der Voraussetzung weiterer Bedingungen. Im weiteren soll ein kurzer Beweis dafür geliefert werden, daß das Integral (1.2) zweiseitige radiale Grenzwert* für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F^*$ besitzt, falls $\sigma(\varrho)$ und das normale Einheitsvektorfeld von F eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung im betrachteten Punkte von F erfüllt. Es soll ferner ein Gegenbeispiel dafür gegeben werden, daß für die stetige Ladungsdichte bzw. für das glatte Flächenstück vermutlich gleichfalls kein radialer Grenzwert existiert, d. h. daß hier die *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in gewisser Hinsicht ebenso unerläßlich ist.

* Den Grenzwert nennen wir radial, wenn \mathbf{r} einer glatten Kurve $K: \mathbf{r}(t)$ entlang dem $\varrho \in F^*$ zustrebt und

$$\mathbf{r}[t(\varrho)] \cdot \mathbf{n}(\varrho) \neq 0$$

gültig ist. $\mathbf{n}(\varrho)$ ist der normale Einheitsvektor von F in ϱ , F^* hingegen die Menge innerer Punkte von F .

2. Existenzbeweise

Betrachten wir vorerst einen von *Jordan-Kurven* begrenzten geschlossenen Ebenenbereich B und bedecken wir ihn mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{t})$. Es sei vorausgesetzt, daß σ *L-integrierbar* an B ist, daß ferner σ einer *Dini-Lipschitzschen* Bedingung im inneren Punkt $\mathbf{t}_0 \in B^*$ genügt, d. h., daß

$$|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)| \leq C_1 |\log |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||^{-(1+d)} \quad (d > 0) \quad (2.1)$$

für genügend kleine $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|$ Gültigkeit hat. Das Potential bzw. die Feldstärke ist dann in $\mathbf{x} \notin B$ durch

$$U(\mathbf{x}) = \int_{(B)} \frac{\sigma(\mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|} d\mathbf{f}_t \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{(B)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.2)$$

angegeben. Betrachten wir speziell den Punkt

$$\mathbf{x}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{n}t, \quad (2.3)$$

in welchem \mathbf{n} der normale Einheitsvektor der angegebenen Ebene ist.

Hilfssatz 2.1. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)$ besitzt neben den obigen Bedingungen Grenzwerte auch für $t \rightarrow 0 + 0$, auch für $t \rightarrow 0 - 0$ und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0 + 0} \mathbf{E}[\mathbf{x}_0(t)] - \lim_{t \rightarrow 0 - 0} \mathbf{E}[\mathbf{x}_0(t)] = \mathbf{E}_+(\mathbf{t}_0) - \mathbf{E}_-(\mathbf{t}_0) = 4\pi\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Beweis: Es sei $|t|$ klein genug und $\varepsilon > 0$ sei so gewählt, daß die Kreisfläche K um \mathbf{t}_0 mit dem Radius ε ganz im Innern von B liege. Man betrachte weiters $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)$ als Summe der Feldkräfte

$$\mathbf{E}_I(\mathbf{x}_0) = \int_{(B-K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.5)$$

bzw.

$$\mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.6)$$

\mathbf{E}_I besitzt natürlich einen Grenzwert für $t \rightarrow 0$, da \mathbf{t}_0 nicht in $B - K$ liegt. Es gilt ferner

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{E}_I(\mathbf{t}_0) \mp 2\pi\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}| = O(|\log |\varepsilon||^{-d}) + O(|\log |t||^{-d}), \quad (2.7)$$

wo ein $-$ bzw. $+$ Zeichen zu setzen ist, je nachdem, ob $t > 0$ bzw. $t < 0$ feststeht. [(2.7) enthielt natürlich auch (2.4).] Um dies zu erkennen, werden wir auch \mathbf{E}_{II} trennen, und zwar sei \mathbf{E}_{II} superponiert betrachtet als Summe der Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}^*(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.8)$$

von der konstanten Ladungsdichte $\sigma(t_0)$ zustande gebracht, bzw. als Summe der Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}^{**}(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{[\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.9)$$

Es seien schließlich auch \mathbf{E}_{II}^* und \mathbf{E}_{II}^{**} in zwei Komponenten, nämlich in eine dem Normalvektor der Ebene parallele und in eine der Ebene parallele Komponente zerlegt:

$$\mathbf{E}_{II}^* = \mathbf{E}_{II;n}^* + \mathbf{E}_{II;P}^*; \quad \mathbf{E}_{II}^{**} = \mathbf{E}_{II;n}^{**} + \mathbf{E}_{II;P}^{**}. \quad (2.10)$$

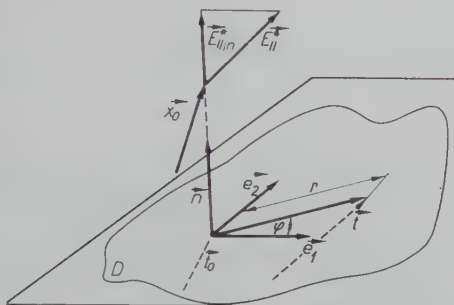


Abb. 1

Um diese Größen bestimmen zu können, führen wir die Polarkoordinaten r, φ d. h. $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2$ ein. Damit hat man (siehe Abb. 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \mathbf{E}_{II}^* &= \pm |\mathbf{E}_{II;n}^*| = \sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \int_{(K)} \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t = \\ &= \pm \sigma(\mathbf{t}_0) \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{t}{(t^2 + \varrho^2)^{3/2}} \varrho d\varrho d\varphi = \mp 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) \left[t(t^2 + \varrho^2)^{-1/2} \right]_0^\varepsilon = \\ &= \pm 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) \mp \frac{2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) \cdot t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} = \pm 3\pi \sigma(\mathbf{t}_0) + O_\varepsilon(|t|), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei obere bzw. untere Vorzeichen zu nehmen sind, je nachdem, ob $\mathbf{x}_0(t)$ in jenem Halbraum liegt, nach dem \mathbf{n} (von \mathbf{t}_0 ausgehend) zeigt, bzw. umgekehrt.

Der Symmetrie-Eigenschaften von K bzw. der integrierenden Funktion gemäß folgt ferner, daß auch

$$\mathbf{E}_{II;P}^*(\mathbf{x}_0) \equiv 0 \quad (2.12)$$

Gültigkeit hat.

Weiters gilt — man benützt hier auch (2.11) —

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{n} \mathbf{E}_{\text{II}}^{**}| &= |\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}; n| \leq \int_{(K)} \frac{|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})| d\mathbf{f} \leq \\
 &\leq C_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{t |\varrho| d\varrho}{|\log |\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} \right\} d\varphi \leq 2\pi C_1 \int_0^\varepsilon \frac{t |\varrho| d\varrho}{|\log |\varepsilon||^{1+d} (t^2 + \varrho^2)^{3/2}} = \\
 &= 2\pi C_1 \frac{1}{|\log |\varepsilon||^{1+d}} \{1 + O_e(|t|)\} = O\left(\frac{1}{|\log |\varepsilon||^{1+d}}\right) \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}; P| &\leq \int_{(K)} \frac{|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})_P| d\mathbf{f} \leq \\
 &\leq C_1 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{\varrho}{|\log |\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} \varrho d\varrho \right\} d\varphi \leq 2\pi C_1 \left\{ \int_0^{|t|} + \int_{|t|}^\varepsilon \right\} \frac{\varrho^2 d\varrho}{|\log |\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} \leq \\
 &\leq 2\pi C_1 \int_0^{|t|} \frac{|t| \cdot \varrho \cdot d\varrho}{|\log |t||^{1+d} (t^2 + \varrho^2)^{3/2}} + 2\pi C_1 \int_{|t|}^\varepsilon \frac{\varrho^2 d\varrho}{|\log |\varrho||^{1+d} \cdot \varrho^3} = \quad (2.14) \\
 &= O\left(\frac{1}{|\log |t||^{1+d}}\right) + 2\pi C_1 \left| \frac{1}{d |\log |\varrho||^d} \right|_{|t|}^\varepsilon = O\left(\frac{1}{|\log |t||^d}\right) + O\left(\frac{1}{|\log |\varepsilon||^d}\right).
 \end{aligned}$$

(2.10), (2.11), (2.12), (2.13) und (2.14) lassen die Richtigkeit von (2.7) erkennen, womit wir den Hilfssatz 2.1. bewiesen haben.

Es sei nun wieder (2.1) vorausgesetzt, und \mathbf{a} ein beliebiger Einheitsvektor, der aber nicht senkrecht zu \mathbf{n} steht, d. h. es sei $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} > 0$. Betrachten wir nun den Punkt

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{a} \cdot t \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} > 0). \quad (2.15)$$

Hilfssatz 2.2. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1)$ besitzt mit den obigen Bedingungen — d. h. mit (2.1) und (2.15) — auch Grenzwerte für $t \rightarrow 0 + 0$, und für $t \rightarrow 0 - 0$ und (2.4) ist auch jetzt gültig.

Beweis: Es sei wieder $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß die Kreisfläche K um \mathbf{t}_0 mit dem Radius ε ganz im Innern von B liege; weiters sei $|t| < \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \varepsilon}{3}$. Es sei ferner wieder $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1)$ als Summe von \mathbf{E}_I unter (2.5) und \mathbf{E}_{II} unter (2.6) betrachtet. \mathbf{E}_I besitzt dann natürlich auch jetzt einen Grenzwert für $t \rightarrow 0$. Wir zeigen nun, daß (2.7) auch jetzt besteht, indem wir auch jetzt \mathbf{E}_{II} den Gleichungen (2.8) bzw. (2.9) gemäß in zwei Teile trennen. Es sei weiters die Orthogonalprojektion von \mathbf{x}_1 auf K mit \mathbf{t}_1 bezeichnet, und es sei L der Kreis um \mathbf{t}_1 mit dem

Radius μ , der ganz in K liegt, und K berührt (s. Abb. 2). Es gilt also $0 < \mu \leq \varepsilon$. Schließlich werde auch \mathbf{E}_{11}^* folgendermaßen getrennt:

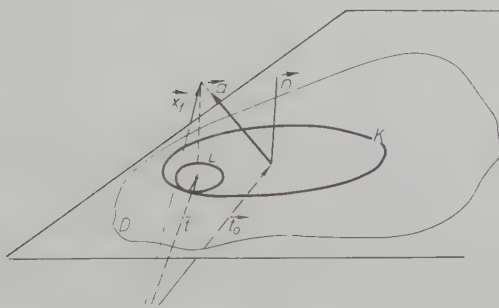
$$\mathbf{E}_{11}^* = \mathbf{F}_{11}^* + \mathbf{G}_{11}^* \quad (2.16)$$

mit

$$\mathbf{F}_{11}^* = \int_{(L)} \frac{\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t, \quad (2.17)$$

bzw.

$$\mathbf{G}_{11}^* = \int_{(K-L)} \frac{\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.18)$$



Für \mathbf{F}_{11}^* bekommt man nun ähnlich dem obigen

$$|\mathbf{n} \mathbf{F}_{11}^*| = \pm 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) + O_\mu \left(\frac{|t|}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}} \right) = \pm 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) + O_\mu(|t|). \quad (2.19)$$

$$|\mathbf{F}_{11}^*; P| = 0. \quad (2.20)$$

Um nun $|\mathbf{G}_{11}^*|$ abschätzen zu können, halten wir fest, daß einerseits

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}| \geq \mu \geq \varepsilon - |t| \geq \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \varepsilon}{2}, \quad (2.21)$$

d. h.

$$\frac{|\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{t})|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}|^3} \leq \frac{4 \cdot |\sigma(\mathbf{t}_0)|}{\varepsilon^2 \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2} \quad (2.22)$$

während andererseits der Flächeninhalt von $(K - L)$ kleiner ist als der Flächeninhalt eines Kreises mit dem inneren Radius $\varepsilon - |t|$ und dem äußeren Radius $\varepsilon + |t|$. Daraus folgt aber im Sinne von (2.22), daß

$$|\mathbf{G}_{11}^*| \leq \frac{4 \cdot |\sigma(\mathbf{t}_0)|}{\varepsilon^2 \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})} \cdot 2|t| \cdot 2\pi\varepsilon = O_\varepsilon(|t|). \quad (2.23)$$

Um nun E_{II}^{**} abschätzen zu können, betrachten wir die neue Ebene S durch t_0 , mit dem Normalvektor \mathbf{a} und belegen sie mit einer Ladungsschicht $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$, wo also \mathbf{r} einen laufenden Punkt auf S bezeichnet. Es sei hierbei eine eindeutige und schlichte Abbildung

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}; \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 \quad (2.24)$$

angegeben, und zwar durch eine zu \mathbf{a} parallele Projektion; es gelte also die Identität

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t}) \equiv [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A})] \cdot \mathbf{t} \equiv 0.$$

Es sei weiters die Projektion von K auf S mit P bezeichnet. $\zeta(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{A}\mathbf{t})$ sei nun folgendermaßen definiert:

$$\zeta(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{A}\mathbf{t}) = [\sigma(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}} \cdot \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{x}_1|^2}. \quad (2.25)$$

Wir werden nun zuerst abschätzen, wie groß die Abweichung der mittels $\zeta(\mathbf{r})$ zustande gebrachten Feldstärke

$$\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}) = \int_{(P)} \frac{\zeta(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (2.26)$$

und der Feldstärke $\mathbf{E}_{II}^{**}(\mathbf{x})$ im Punkte $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t)$ ist; im zweiten Schritt werden wir $\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}_1(t)]$ selbst abschätzen.

Es sei also innerst das »Feldstärkelement«

$$d\mathbf{E}_{II}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i) = [\sigma(\tau_i) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \frac{(\mathbf{x}_1 - \tau_i)}{|\mathbf{x}_1 - \tau_i|^3} d\mathbf{f}_i^{(i)}, \quad (2.27)$$

zustande gebracht mittels des Flächenelementes $d\mathbf{f}_i^{(i)}$ mit dem repräsentierenden Punkt τ_i bzw. mittels des Ladungselementes

$$[\sigma(\tau_i) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot d\mathbf{f}_i^{(i)}$$

einerseits, mit dem »Feldstärkelement«

$$d\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_1; \varrho_i) = \zeta(\varrho_i) \frac{(\mathbf{x}_1 - \varrho_i)}{|\mathbf{x}_1 - \varrho_i|^3} d\mathbf{f}_r^{(i)} \quad (2.28)$$

zustande gebracht mittels des Projektionselementes $d\mathbf{f}_r^{(i)}$ von $d\mathbf{f}_i^{(i)}$ bzw. mittels des Ladungselementes

$$\zeta(\varrho_i) d\mathbf{f}_r^{(i)}$$

andererseits verglichen, wo der repräsentierende Punkt $\varrho_i = \mathbf{A} \tau_i$ die Projektion von τ_i darstellt. Es ist leicht einzusehen, daß

$$|d\mathbf{E}_{II}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)| \equiv |d\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_1; \varrho_i)| \quad (2.29)$$

gültig ist, denn einerseits gilt die Identität

$$df_t^{(i)} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}} df_r^{(i)}, \quad (2.29a)$$

andererseits die Identität

$$\begin{aligned} \left| \frac{\boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{x}_1}{|\boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{x}_1|^3} \right| &= \frac{1}{|\boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{x}_1|^2} = \frac{1}{|\boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{|\boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1|^2}{|\boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{x}_1|^2} = \\ &= \left| \frac{\boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1}{|\boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1|^3} \right|, \quad \frac{|\boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varrho}_i - \mathbf{x}_1|^2}. \end{aligned} \quad (2.29b)$$

Um nun also

$$|dE_\zeta(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\varrho}_i) - dE_{II}^{**}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\tau}_i)|$$

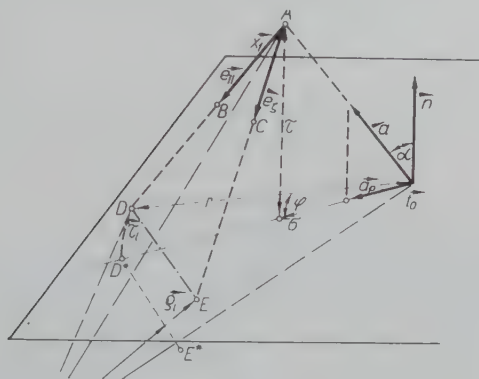


Abb. 3

abschätzen zu können brauchen wir nur die Abweichung der entsprechenden Einheitsvektoren, d. h.

$$|e'_\zeta - e_{II}|$$

zu betrachten. In der ursprünglichen Ebene führen wir wieder die Polarkoordinaten mit der Projektion a_p von \mathbf{a} auf diese Ebene als Polarachse ein, d. h. es sei

$$|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t}_0| = r$$

gültig. Wie Abb. 3 zeigt besteht die Ungleichung

$$|e_\zeta - e_{II}| \leq |\text{arc}(e_\zeta; e_{II})| = |\text{arc}(BAC)| \leq \frac{\overline{DE}}{\min(\overline{AD}; \overline{AE})}.$$

Betrachten wir nun erst jene Hälfte der Ebene in der $AD \leq AE$, d. h. $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ ist. In diesem Bereich nimmt — bei fixiertem $r = |\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t}_0|$ — der Abstand \overline{DE} sein Maximum und ebenso \overline{AD} sein Minimum, d. h. $\overline{ED}/\overline{AD}$

sein Maximum für $\varphi_0 = 0$ d. h. für $E^* \bar{D}^* / AD^*$ an. In der anderen Hälfte sind für $\varphi^* = \varphi - \text{sign } \varphi \pi$ — aus Symmetriegründen — bei fixiertem r \overline{AE} und ED ebenso groß, wie sie für φ waren, es gilt aber hier $\overline{AE} < \overline{AD}$ und darum ist $DE/\min(AE; AD)$ kleiner, als für φ ; $D\bar{E}/\min(A\bar{E}; \overline{AD})$ nimmt also bei fixiertem r sein Maximum für $\varphi = 0$ an, mithin gilt gemäß Abb. 3.

$$|e_{\zeta} - e_{\Pi}| \leq \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}}$$

mit $0 < \alpha = \arccos(\mathbf{a}; \mathbf{n}) < \frac{\pi}{2}$, $\sigma = t \sin \alpha$ und $\tau = \tau(t) = t \cos \alpha$.

Es wird mithin

$$|d\mathbf{E}_{\zeta}(\mathbf{x}_1; \varrho_i) - d\mathbf{E}_{\Pi}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)| \leq \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} |d\mathbf{E}_{\Pi}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)|$$

und gemäß (2.14)

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\zeta}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{E}_{\Pi}^{**}(\mathbf{x}_1)| &\leq \int_{(K)} |d\mathbf{E}_{\zeta} - d\mathbf{E}_{\Pi}^{**}| \leq \\ &\iint_{(K)} \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} \cdot \frac{|\sigma(r; q) - \sigma(0)|}{[(r - \sigma)^2 + \tau^2]} r dr d\varphi \leq 2\pi \sin \alpha \int_0^{\varepsilon} \frac{r^2 \cdot \log |r|^{(1+d)}}{[(r - \sigma)^2 + \tau^2]^{3/2}} dr \leq \\ &2\pi \sin \alpha \left\{ \int_0^{2\sigma_0} \frac{4\sigma^2 dr}{|\log 2\sigma|^{1+d} \cdot \tau^3} + \int_{2\sigma_0}^{\varepsilon} \frac{r^2 dr}{|\log r|^{1+d} \cdot \frac{1}{8} r^3} \right\} \leq 2\pi \sin \alpha \left\{ 8 \frac{\sigma^3}{\tau^2} |\log 2\sigma|^{1+d} + \right. \\ &\left. + 8 \frac{1}{d} \frac{1}{|\log \varepsilon|^d} \right\} = O\left(\frac{1}{|\log |t||^{1+d}}\right) + O\left(\frac{1}{|\log \varepsilon|^d}\right) \quad (2.30) \end{aligned}$$

falls σ , d. h. t genug klein, und zwar kleiner als ε ist.

Um nun $|\mathbf{E}_{\zeta}(\mathbf{x}_1)|$ selbst abzuschätzen, zeigen wir, daß der *Hilfssatz 2.1* anwendbar ist indem wir nachweisen, daß $\zeta(\mathbf{r})$ im Punkte $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{t}_0$ eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung erfüllt. Da hier

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|$$

gültig ist, und der erste Faktor von ζ , nämlich $\sigma(A^{-1}\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{t}_0)$ definitionsgemäß eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung erfüllt und eben deshalb in K beschränkt ist, da weiters

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t}_0)\beta(\mathbf{t}_0)| &= |a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}_0) + a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}_0) - a(\mathbf{t}_0)\beta(\mathbf{t}_0)| \leq \\ &\leq \sup_i |a| \cdot |\beta(\mathbf{t}) - \beta(\mathbf{t}_0)| + \sup_i |\beta| \cdot |a(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t}_0)| \quad (2.31) \end{aligned}$$

Gültigkeit hat, so brauchen wir nur zu beweisen, daß der zweite Faktor von ζ ebenfalls eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in t_0 (um so mehr eine *Lipschitzsche* Bedingung) erfüllt und eben deswegen auch in a beschränkt ist. Der zweite Faktor von ζ , nämlich

$$f(\mathbf{x}_1; \mathbf{t}) = \frac{A^{-1} \mathbf{t} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2}$$

ist aber differenzierbar in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, und sein Gradientenvektor

$$\text{grad}_t f = \frac{2|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2 \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{x}_1) \cdot A^{-1} - 2|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2 \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^4}$$

besitzt einen endlichen, und zwar als Funktion von $t = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}_0|$ einen gleichmäßig beschränkten (die obere Schranke hängt nur von A^{-1} , d. h. $\frac{1}{n \cdot a}$ ab).

Grenzwert für $t \rightarrow t_0$. Dem Hilfssatz 2.1 gemäß folgt also, daß

$$|\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_0)| = O\left(\frac{1}{|\log |t||^d}\right) + O\left(\frac{1}{|\log |\varepsilon||^d}\right)$$

da

$$\zeta(\mathbf{r}_0) = \zeta(\mathbf{t}_0) = 0.$$

(2.19), (2.20), (2.23), (2.30), (2.31) und (2.32) zeigen nun, daß die Abschätzung (2.4), d. h. der Hilfssatz 2.2 Gültigkeit hat.

Hilfssatz 2.3. $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ besitzt mit der Bedingung (2.1) einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}_0 \in B^*$.

Beweis: Es strebe \mathbf{x} längs einer in \mathbf{t}_0 glatten Kurve $K: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ gegen $\mathbf{t}_0 = \mathbf{x}(0) \in B^*$. Bezeichnen wir den Tangenteneinheitsvektor von K in \mathbf{t}_0 mit \mathbf{s} , dann stehen \mathbf{s} und \mathbf{n} den Voraussetzungen gemäß nicht senkrecht auf einander, d. h. es gilt

$$|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| > 0.$$

K kann man auch in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{a}(t) \cdot t \quad (\mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{1})$$

schreiben, und — da K in \mathbf{t}_0 glatt ist —, eine $\delta > 0$ so angeben, daß

$$|\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| = \frac{1}{2} \vartheta_0 > 0 \quad \text{für } 0 \leq |t| \leq \delta \quad (2.33)$$

gelte (daß also $\mathbf{a}(t)$ zur Sehne von K parallel ist!).

Da nun der Gleichung (2.31) gemäß die obere Schranke von $|\text{grad}_t f|$ nur von $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|^{-1}$ abhängt, d. h. die Ordorelationen im *Hilfssatz 2.2* gleichmäßig in Hinsicht auf $t = |\mathbf{x} - \mathbf{t}_0|$ bestanden, und da aus (2.33) auch jetzt eine gleichmäßige obere Schranke von $|\text{grad}_t f|$ folgt, hat der Hilfssatz 2.3 volle Gültigkeit.

Satz 2.4. Es sei F ein glattes, von Jordan-Kurven begrenztes, mit der L -integrierbaren Ladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ bedecktes Flächenstück, und es genüge das normale Einheitsvektorfeld $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ sowie $\sigma(\mathbf{r})$ einer Dini—Lipschitzschen Bedingung im inneren Punkte \mathbf{r}_0 von F , d. h. es sei $\mathbf{r}_0 \in F^*$ und

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_0)| \leq C_2 \frac{1}{|\log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||^{1+C_3}} \quad (C_3 > 0) \quad (2.34)$$

bzw.

$$|\sigma(\mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{r}_0)| \leq C_4 \frac{1}{|\log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||^{1+C_5}} \quad (C_5 > 0) \quad (2.35)$$

für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq \mu_0$. Es besitzt dann die Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (\mathbf{x} \notin F) \quad (2.36)$$

einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in F^*$; angenommen, daß $[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \geq 0$, je nachdem, ob $t \geq 0$ ist, gilt

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}_0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)] - \lim_{t \rightarrow 0-0} \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)] = 4\pi\sigma(\mathbf{r}_0)\mathbf{n}(\mathbf{r}_0). \quad (2.37)$$

Beweis: Wir bezeichnen die Schmiegeebene von F in \mathbf{r}_0 mit S , und es sei eine $0 < \varepsilon < \mu_0$ so gewählt, daß die zu $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$ parallele Projektion der Punkte \mathbf{r} des gemeinsamen Teiles von F und der Kugel R_ε mit dem Radius ε um \mathbf{r}_0 : F_ε im Punkt \mathbf{t} von S (pünktlicher: S_ε) ein-eindeutig sei.

Die Feldstärke

$$\mathbf{E}_I(\mathbf{x}) = \int_{(F-F_\varepsilon)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (2.38)$$

besitzt dann natürlich einen Grenzwert, und zwar: $\mathbf{E}_I(\mathbf{r}_0)$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Betrachten wir nun den anderen Teil der ursprünglichen Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}) = \int_{(F_\varepsilon)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r, \quad (2.39)$$

falls \mathbf{x} einer in \mathbf{r}_0 glatten Kurve $K: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ entlang in Richtung $\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}(0)$ strebt. Der Voraussetzungen gemäß kann man natürlich annehmen, daß

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) > 0, \quad (2.40)$$

daß ferner $\varepsilon > 0$ gleichfalls so gewählt ist, daß

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] \geq \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) > 0 \quad (2.41)$$

auch für $|t| \leq \varepsilon$ zu Recht besteht. Es sei nun S_ε mit der Ladungsdichte

$$\zeta_t(\mathbf{t}) = \sigma[\mathbf{r}(\mathbf{t})] \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})|^2}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}(\mathbf{t})|^2} \cdot \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} \quad (2.42)$$

belegt. Sodann wollen wir die Feldstärke

$$\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}) = \int_{(S_\varepsilon)} \frac{\zeta_t(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.43)$$

betrachten, wozu vorerst bemerkt werden soll, daß $\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)]$ dem Hilfssatz 2.3 gemäß einen zweiseitigen Grenzwert für $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{t}_0 = \mathbf{r}_0$ besitzt, und zwar gilt die Relation

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)] - \lim_{t \rightarrow 0-0} \mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)] = 4\pi \zeta(\mathbf{t}_0) \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) = 4\pi \sigma(\mathbf{r}_0) \mathbf{n}(\mathbf{r}_0). \quad (2.44)$$

Dazu braucht man nur zu bedenken, daß hier ζ_t auch selbst vom Parameter t abhängt, aber — wie schon beim Beweis des Hilfssatzes 2.2 bemerkt —,

$$\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})|^2}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}(\mathbf{t})|^2} \quad (2.45)$$

in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ einer *Lipschitzschen* Bedingung mit dem Exponenten 1 genügt, und zwar gleichmäßig für $2.13 \ 0 \leq |t| \leq \varepsilon$. Es ist weiters nachzuweisen, daß der Faktor $|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(t)]|^{-1}$ gleichfalls eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t}_0)]} \right| = \left| \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - 1 \right| = \\ & = \left| \frac{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} \right| \leq \frac{1}{|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|} \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nun haben wir $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß einerseits

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})| \geq \vartheta_0 > 0, \text{ d. h. } |\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]| \geq \vartheta_0 \quad (2.47)$$

für $\mathbf{r} \in F_\varepsilon$, d. h. $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ Gültigkeit habe, andererseits auch

$$C_6 |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| \leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq C_7 |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|, \quad (2.48)$$

für $\mathbf{r} \in F_\varepsilon$ bzw. $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ zu Recht bestehe (S_ε ist die Tangentialebene von F_ε in \mathbf{r}_0 , weshalb $|\mathbf{r} - \mathbf{t}| = o(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ gültig ist). Hieraus und aus der Voraussetzung (2.34) folgt nun direkt, daß auch

$$\left| \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t})} \right| \leq \frac{C_8}{|\log |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||^{1+C_5}} \quad (2.49)$$

richtig ist, d. h. daß der Hilfssatz 2.3 für $E_{\zeta}[\mathbf{x}(t)]$ anwendbar ist. Wir haben nun noch nachzuweisen, daß

$$\lim_{t \rightarrow 0} |E_{\zeta}[\mathbf{x}(t)] - E_{II}[\mathbf{x}(t)]| = 0 \quad (2.50)$$

ist, denn (2.38), (2.44) und (2.50) gemäß ist dann auch unserer Satz bewiesen. Um nun (2.50) zu beweisen, werden wir — auf eine dem Beweis des Hilfssatzes 2.2 ähnliche Weise — wieder erst nur die Wirkung der einzelnen, einander entsprechenden »Ladungselemente« betrachten. Es sei also df_r ein Flächenelement der Fläche F , mit dem repräsentierenden Punkt ϱ_0 , ferner df_t das dem obigen entsprechende Element auf S , mit dem entsprechenden repräsentierenden Punkt τ_0 . Betrachten wir die »Feldstärkelemente«

$$dE_{II}[\mathbf{x}; \varrho_0] = \frac{\sigma(\varrho_0) \cdot (\varrho_0 - \mathbf{x})}{|\varrho_0 - \mathbf{x}|^3} df_r,$$

bzw.

$$dE_{\zeta}[\mathbf{x}; \tau_0] = \frac{\zeta_t(\tau_0) \cdot (\tau_0 - \mathbf{x})}{|\tau_0 - \mathbf{x}|^3} df_t,$$

dann wird man auch jetzt direkt einsehen [s. auch (2.29)], daß

$$|dE_{II}[\mathbf{x}(t); \varrho_0]| \equiv |dE_{\zeta}[\mathbf{x}(t); \tau_0]|$$

gültig ist; wir brauchen also wieder nur die Abweichung der entsprechenden Einheitsvektoren, d. h.

$$|\mathbf{e}_{\zeta} - \mathbf{e}_{II}|$$

abzuschätzen. Zu diesem Zweck fixieren wir $t = t_0$: $|t_0| < \varepsilon$, und ferner sei

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0|}.$$

Weiters führen wir in S Polarkoordinaten ein, und zwar wählen wir das Polazentrum in $\mathbf{t}_0 = \mathbf{r}_0$, die Polarachse aber durch die Projektion von $\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0$ auf S (s. Abb. 4). Es sei ferner $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)$ mit $\tau = \tau(\mathbf{t}_0)$, $\sqrt{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0)^2 - \tau^2}$ hingegen mit $\sigma = \sigma(\mathbf{t}_0)$ bezeichnet (s. Abb. 4). Da nun S die Tangentialebene von F , d. h. $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| = o(|\mathbf{r} - \mathbf{t}|)$ für $\mathbf{r} - \mathbf{t} \perp \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)$ gültig ist, da ferner die Kurve K die Fläche F nicht berührt, kann man annehmen, daß t_0 bzw. ε schon so klein sind, daß

$$\min\{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|; |\mathbf{x} - \mathbf{t}|\} \geq \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{t}| \quad \text{für } \mathbf{r} \in F_s \text{ bzw. } \mathbf{t} \in S_s$$

bei $|\mathbf{t}| \leq |t_0|$ stets Gültigkeit hat. $|\mathbf{e}_{\zeta} - \mathbf{e}_{II}|$ kann man nun nach demselben Gedankengang abschätzen, den wir schon beim Beweis Hilfssatzes 2.2 angegeben haben; es gilt somit (s. Abb. 4)

$$|\mathbf{e}_{\zeta} - \mathbf{e}_{II}| \leq \frac{\overline{BC}}{\min[AB; AC]} \leq 2 \frac{\overline{BC}}{AC^*} = 2 \frac{1}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} \cdot |\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}|.$$

Um nun $|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}|$, d. h. die Entfernung des Punktes auf der Fläche F und des entsprechenden Punktes auf der Tangentialebene S abschätzen zu können, wenden wir die Voraussetzung (2.34) an, woraus dem Mittelwertsatz gemäß folgt, daß

$$|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}| \leq |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| \cdot \sup_{|\tau - t_0| \leq |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|} [|\mathbf{n}(\tau) - \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)|] \leq C_9 \frac{r}{|\log^{1+C_5} |r||}$$

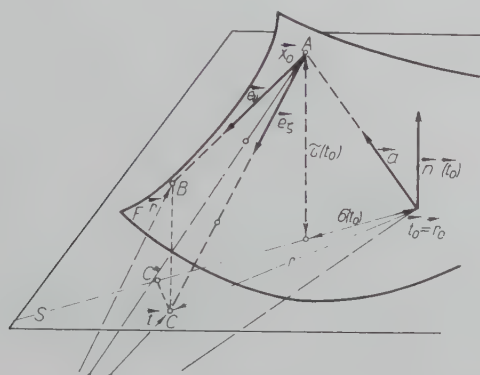


Abb. 4

für $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ gültig ist. Damit haben wir

$$|\mathbf{e}_t - \mathbf{e}_{II}| \leq C_{10} \frac{r}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} \cdot \frac{1}{|\log |r||^{1+C_5}}, \quad (2.51)$$

d. h.

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_t(\mathbf{x}_0) - \mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_0)| &\leq \int_{S_\varepsilon} |\mathbf{d} \mathbf{E}_t - \mathbf{d} \mathbf{E}_{II}| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon C_{10} \frac{r}{[\sqrt{(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2}]^3} \cdot \frac{\sup_{t \in S_\varepsilon} |\sigma(t)|}{|\log |r||^{1+C_5}} r \, dr \, d\varphi \leq \\ &\leq C_{11} \cdot \sigma(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \frac{r^2 \, dr}{[(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2]^{3/2} \cdot |\log |r||^{1+C_5}} = [\sigma(\varepsilon) = \sup_{t \in S_\varepsilon} |\sigma|] \quad (2.52) \\ &= C_{11} \cdot \sigma(\varepsilon) \left\{ \int_0^{2\sigma_0} + \int_{2\sigma_0}^\varepsilon \right\} \frac{r^2 \, dr}{[(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2]^{3/2} \cdot |\log |r||^{1+C_5}}. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung dieser Integrale werden wir davon ausgehen, daß K die Fläche F nicht berührt, um so mehr, als auch (2.41) feststeht, d. h. um so mehr, als

$$C_{12} \tau_0 \leq \sigma_0 \leq C_{13} \tau_0 \quad (2.53)$$

und eben deshalb

$$0 < \frac{\sigma_0^3}{\tau_0^3} \leq C_{14} \quad (2.53a)$$

für genügend kleine t_0 Gültigkeit hat. Es gilt ferner, daß

$$(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2 \geq \frac{r^2}{4}$$

für $r < 2 \sigma_0$ geschrieben werden kann, womit

$$\begin{aligned} |E_\zeta(\mathbf{x}_0) - E_{II}(\mathbf{x}_0)| &< C_{11} \sigma(\varepsilon) \int_0^{2\sigma_0} \frac{4\sigma_0^2 dr}{|\log |\sigma_0||^{1+C_5} \tau_0^3} + \\ &+ C_{11} \sigma(\varepsilon) \int_{2\sigma_0}^\varepsilon \frac{r^2 dr}{|\log |r||^{1+C_5} \frac{r^3}{8}} \leq \quad (2.54) \\ &\leq C_{11} \sigma(\varepsilon) \frac{8\sigma_0^3}{|\log |\sigma_0||^{1+C_5}} \cdot \frac{1}{\tau_0^3} + C_{11} \sigma(\varepsilon) 8 \frac{1}{C_5} \frac{1}{|\log |\varepsilon||^{C_5}}, \end{aligned}$$

und weiter im Sinne von (2.53a)

$$|E_\zeta(\mathbf{x}_0) - E_{II}(\mathbf{x}_0)| \leq O \left(\frac{1}{|\log |\varepsilon||^{C_5}} \right) + O \left(\frac{1}{|\log |\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0||^{C_5}} \right),$$

womit wir auch den Satz 2.4 bewiesen haben.

Es sei hier noch bemerkt, daß die Voraussetzungen (2.34) bzw. (2.35) noch etwas geschwächt werden können, denn es genügt, für die Stetigkeitsmoduln von σ bzw. n eine solche obere Schranke $s^{-1}(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ statt $\log^{-(1+C_5)}(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ anzugeben, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r s(r)}$$

noch existiere.

3. Konstruktion eines einfachen Gegenbeispielles

Betrachten wir eine Kreisplatte K mit Zentrum O und Normalenvektor \mathbf{e}_3 und belegen wir sie mit der Ladungsdichte (r und φ — und weiter z — bedeuten Zylinderkoordinaten)

$$\sigma(\mathbf{t}) = \sigma(r; \varphi) = \cos \varphi \mu(r),$$

wo $\mu(r)$ mit $\mu(0) = 0$ eine stetige Funktion in $0 \leq r \leq R \leq \frac{1}{2}$ bildet. Betrachten wir die Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_K \frac{\sigma(\mathbf{t})(\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t,$$

die von σ im Punkt $\mathbf{x} = z\mathbf{e}_3$ zustande gebracht ist, in welchem schon $|z| < \frac{R}{3}$ ist. Aus den Symmetrieeigenschaften folgt sogleich, daß $\mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ parallel zu $-\mathbf{e}_1$ ist.* Wir werden also

$$E(z) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$$

berechnen und nachweisen, daß

$$\lim_{z \rightarrow 0+0} E(z)$$

gar nicht existiert, falls $\mu(r)$ nicht »genug stetig« in $r = 0$, z. B. $\mu(r) = |\log r|^{-1}$ ist. Wir haben dann für $z > 0$ z. B.

$$\begin{aligned} E(z) &= \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t})[(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}_1]}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\cos \varphi \cdot \mu(r) \cdot (-r \cos \varphi)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r dr \Big\} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

bzw.

$$|E(z)| = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^2 dr}{|\log r| (r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_z^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}} >$$

* Der Leser kann aber ohne Mühe anhand von (3.1) erkennen, daß auch $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ und $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ tatsächlich gleich 0 sind.

$$\begin{aligned}
&> \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{r^2 dr}{|\log r| (2z^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_z^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (2r^2)^{3/2}} > \frac{1}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \int_z^R \frac{dr}{r |\log r|} = \\
&= 2^{-5/2} \{ -\log |\log R| + \log |\log z| \} = 2^{-5/2} \cdot \log \frac{\log z}{\log R},
\end{aligned}$$

also $|E(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 0 + 0$, was zu beweisen war.

Zusammenfassung

Das Potentialfeld bzw. die Feldstärke einer Flächenladungsschicht mit der integrierbaren Dichte σ an dem stückweise glatten, meßbaren Flächenstück F kann durch das Integral

$$U(\mathbf{r}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} df_{\varrho}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r})$$

ausgedrückt werden. Wir zeigen mit elementaren Methoden, daß \mathbf{E} einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F$ besitzt, falls die Flächenladungsdichte bzw. das normale Einheitsvektorfeld von F einer Dini—Lipschitzschen Bedingung in $\varrho \in F$ genügt. Mit Hilfe eines elementaren Gegenbeispiels zeigen wir auch, daß z. B. weder die Stetigkeit von σ , bzw. die des Einheitsvektorfeldes noch das logarithmische Stetigkeitsmodul dieser Funktionen keinen Grenzwert für \mathbf{E} an F sichert.

T. FREY, Budapest V. Szerb u. 23, Ungarn.

ÜBER DIE PROPORTIONEN DER INGENIEUR-TECHNISCHEN ARBEIT

Von

I. HARSÁNYI

Lehrstuhl für industrielle Betriebswirtschaftslehre, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 5. Juli 1960)

In Ungarn befaßt man sich mit der Festlegung der Zahl der für die technische Weiterentwicklung erforderlichen Fachleute, mit den hierbei zu beachtenden Proportionen, mit der Ausbildung von Ingenieuren und Technikern sowie mit den Proportionen der technisch-intellektuellen Arbeit im Zuge der volkswirtschaftlichen Planung.¹ Auf diesem Gebiet fehlt jedoch noch die richtige Erfassung besonders der Proportionen der technisch-intellektuellen Arbeit sowie jener grundlegenden Zusammenhänge, die die Zahl der erforderlichen Ingenieure und Techniker bestimmen, und ebenso gehen die Ansichten darüber auseinander, welche Faktoren es sind, die im Grunde genommen die Zahl der technischen Intellektuellen und das Entwicklungstempo der Heranbildung von Ingenieuren beeinflussen, ferner worin auf diesem Gebiet der Unterschied zwischen der sozialistischen und der kapitalistischen Gesellschaftsordnung besteht. Im Interesse einer besseren wissenschaftlichen Begründung der Planung der technisch-intellektuellen Arbeit werden verschiedene Forschungsarbeiten durchgeführt. Über einige wesentliche Zusammenhänge, die hierbei aufgedeckt wurden, soll im folgenden berichtet werden.²

¹ Mit den Proportionen der Ingenieur- und Technikerarbeit begann man sich 1928 im Zuge der Ausarbeitung des ersten Fünfjahrplanes eingehender in der Sowjetunion zu befassen. In den kapitalistischen Ländern kam es besonders nach dem zweiten Weltkrieg zu Analysen und Berechnungen. Die erste umfassendere kapitalistische Analyse der Heranbildung technischer Fachleute führte England im Jahre 1945 durch. Ein europäischer Bericht von Bedeutung über die Fachleute wurde erstmalig 1953 von der OECC ausgearbeitet, während die in den USA gebildete Kommission ihr erstes Referat über diesen Themenkreis 1956 veröffentlichte. Es enthält zum Großteil auch die Daten der früher in kapitalistischen Ländern herausgegebenen Berichte (Engineering and Scientific Manpower in the United States, Western Europe and Soviet Russia. Washington, 1956). Die Ergebnisse einer diesbezüglichen Untersuchung des Internationalen Arbeitsamtes sind in einer unter dem Titel »Probleme der nicht-manuellen Arbeitnehmer« (Genf, 1958) erschienenen Studie zusammengefaßt. Über die Forschungstätigkeit, die auf diesem Gebiete in den sozialistischen Ländern im Gange ist, dürfte voraussichtlich auf der diesjährigen internationalen Beratung in Warschau referiert werden.

² Eingehender wird das Thema in meiner Studie »Arbeit, gesellschaftliche Stellung und materielle Lage der Ingenieure und Techniker« behandelt.

Methoden

Den Ausführungen über die Proportionen und über einige mit diesen zusammenhängende Beziehungen möchten wir einige Bemerkungen über die Eigenheiten der gewählten Methode vorausschicken. Bei der Wahl der Methode ließen wir uns von der Erwägung leiten, daß zur Beurteilung unserer eigenen Lage auch die Kenntnis der *allgemeinen und grundlegenden Zusammenhänge* erwünscht ist, die in den verschiedenen Ländern beobachtet werden können. Um aber zu allgemeinen Zusammenhängen zu kommen, ist es erforderlich, nicht bloß die Lage in mehreren Ländern, sondern auch einen längeren Zeitraum zu überblicken. Im gegebenen Fall ergab sich als längste Zeitspanne von selbst ein Zeitraum von 30 Jahren, wenn wir vom Jahre 1928 als dem Beginn unserer Untersuchungen ausgehen, von jenem Jahre also, von dem die sozialistische Planwirtschaft ihren Ausgang nahm. Neben der richtigen Wahl der Zeitspanne ergab sich für die Methodik ein zweites Problem daraus, daß außer der Situation der sozialistischen auch die der kapitalistischen Länder untersucht werden muß, wenn man auch die Wirkung der sozialistischen und der kapitalistischen Produktionsverhältnisse erkennen will, woraus folgt, daß die Lage mehrerer sozialistischer und kapitalistischer Länder studiert werden müßte. Die Tatsache jedoch, daß die sozialistischen und die kapitalistischen Länder auf verschieden hohen wirtschaftlichen Entwicklungsstufen stehen, würde ein derartiges Studium zusätzlich dadurch erschweren, daß auch der Einfluß des Unterschiedes im wirtschaftlichen Entwicklungsstand berücksichtigt werden müßte, was dieses ohnehin zusammengesetzte Problem übermäßig komplizieren würde. Aus diesem Grunde erschien es zweckmäßig, je ein sozialistisches und ein kapitalistisches Land zu wählen. Unter den sozialistischen Ländern konnte hierfür nur die Sowjetunion in Frage kommen. Wählt man aber diese zur Grundlage der Untersuchung, dann liegt ein Vergleich mit den Vereinigten Staaten auf der Hand. Als weiteres Problem ergab sich sodann die Frage, wie die umfangsmäßige Gestaltung der technisch-intellektuellen Arbeit anzufassen ist, und welche Erscheinungen es sind, über die einerseits Unterlagen vorliegen und die andererseits die Größenverhältnisse der technisch-intellektuellen Arbeit am besten zum Ausdruck bringen. Dieser Anforderung scheint die Zahl der erteilten Ingenieursdiplome am besten zu entsprechen — auf die Begründung dieser Auffassung können wir hier nicht näher eingehen —, während die zur Verfügung stehenden Daten über die effektive Zahl der Ingenieure, Gelehrten, Techniker und sonstigen technischen Arbeitnehmer nur als ergänzende, als Kontrollberechnungen berücksichtigt wurden.

Im Zuge der Untersuchungen studierten wir verschiedene Umstände (Arbeiter, Wirtschaftsfachleute, Struktur der Industrie usw.), unter denen es die umfangsmäßige Gestaltung der technisch-intellektuellen Arbeit war, die den engsten Zusammenhang mit der Zunahme des Entwicklungstempos der

industriellen Produktion zeigte. Im Rahmen dieser Studie wollen wir lediglich auf die Auswertung dieses Zusammenhanges eingehen.

Die technisch-intellektuelle Arbeit in der Sowjetunion

In der Sowjetunion gab es 1928 insgesamt 47 000 Ingenieure und eine etwas höhere Zahl von Technikern. Den Rahmen des technischen Hochschulunterrichts bestimmten zu jener Zeit noch die Verhältnisse des früheren zaristischen Rußlands, doch hatte der Universitätsunterricht unter dem Einfluß der sozialistischen Revolution bereits eine spürbare Veränderung erfahren. Es hatte sich sowohl der Lehrstoff als auch die soziale Zusammensetzung des Lehrkörpers und der Hörschaft geändert, auf den Hochschulen hatte die naturwissenschaftliche und technische Schulung erhöhte Bedeutung gewonnen, und bereits 1928 besuchten 31% sämtlicher Hörer technische Hochschulen.

In der Sowjetunion erfuhr der Hochschulunterricht in den vergangenen 30 Jahren eine bedeutende Entwicklung, die in der Zunahme sowohl der Zahl der Universitäten als auch der Hochschüler zum Ausdruck gelangte.³

Die Zahl der Absolventen technischer Hochschulen betrug:⁴

Jahr	in Tausenden
1928.....	9
1930.....	21
1935.....	37
1940.....	30
1941—45.....	10
1950.....	36
1951.....	44
1952.....	47
1953.....	46
1954.....	56
1955.....	66
1956.....	71
1957.....	83
1958.....	94

Nach 1928 stieg die Zahl der neuen sowjetischen Ingenieure sprunghaft an, um 1935 mehr als das Vierfache ihrer Zahl in den Jahren 1928—30 zu erreichen. In dieser Periode arbeiten in der Sowjetunion bereits rund 200 000 Ingenieure, die sich zu rund zwei Dritteln aus neuen Absolventen zusammensetzen. In dieser verhältnismäßig kurzen Zeitspanne spielte sich jene Umschichtung ab, die zur Folge hatte, daß der überwiegende Teil der Ingenieure schon neue, vom sowjetischen Staat erteilte Diplome besaß. Von 1935 an erlan-

³ In der Sowjetunion gab es 1928 148 Universitäten und Hochschulen. Gegenwärtig (1958) beträgt ihre Zahl 767, unter denen sich rund 200 technische Hochschulen befinden. 1928 studierten insgesamt 168 000 Hochschüler, während zur Zeit an den verschiedenen Universitäten und Hochschulen mehr als 2 Millionen Hörer immatrikuliert sind.

⁴ Ohne Agronomen, nur Hörer der Universitäten und Hochschulen für Industrie, Bau- und Verkehrswesen sowie Nachrichtentechnik.

gen im Jahresdurchschnitt 30 000 Hörer die Ingenieursqualifikation. Während der Kriegsjahre trat — wie allgemein auf dem Gebiet der Wissenschaften und auf allen kulturellen Gebieten — auch in der technischen Kultur, in der Heranbildung von Ingenieuren ein Rückgang ein, zumal der Hochschulunterricht nahezu gänzlich darniederlag. Ganz allgemein gesehen, vollendeten in den Kriegsjahren jährlich kaum 10 000 Hörer ihr Studium, und viele von ihnen gelangten erst nach dem Kriege dazu, ihre vor dem Krieg begonnenen Studien fortzusetzen. Die Heranbildung von Ingenieuren und die Zahl der erteilten Diplome erreicht in der Sowjetunion erst in den Jahren 1949/50 den Vorkriegsstand. Nach 1950 zeichnet sich ein rascher Fortschritt ab, in 5—6 Jahren verdoppelt sich die Zahl der inskribierten Hörer, und 1956 sind es 71 000, 1958 hingegen bereits 94 000 sowjetische Hörer, die ihr Staatsexamen mit Erfolg ablegen und das Diplom erlangen.

Zahl der in der Volkswirtschaft arbeitenden Diplomingenieure

1929.....	47 000
1940.....	290 000
1950.....	392 000
1953.....	481 000
1956.....	721 000
1960.....	1 000 000 (Schätzung)

In der Heranbildung von Ingenieuren lassen sich in der Sowjetunion verschiedene Perioden unterscheiden. Die erste Periode ist die Zeit vor 1928, in der das sowjetische Unterrichtswesen begründet wurde, in der die Grundlagen der neuen sozialistischen Universitäten und Hochschulen gelegt wurden, in der aber die Ausbildung — besonders die Heranbildung von Ingenieuren und Technikern — mit den Anforderungen der Volkswirtschaft nicht in Einklang stand, hinter dem Bedarf zurückblieb und den technischen Fortschritt verzögerte und hemmte. Die Periode nach 1928, die bis zum Krieg dauerte, ist die Zeit der gleichmäßigen, kraftvollen Entwicklung. Es folgt die Zeit des Krieges mit dem schon erwähnten Rückschlag und sodann die Wiederherstellung und das Aufsteigen zum Vorkriegsniveau in den Jahren 1949/50. Daran schließt sich die jüngste Periode an, in der die Entwicklung auf diesem Gebiet dem allgemeinen gesellschaftlichen Fortschritt folgt und eine gleichmäßige schnelle Ausbildung im Gange ist. In den einzelnen Perioden ist die Entwicklung verschieden rasch, *zusammengefaßt stieg jedoch die Zahl der Ingenieure in der untersuchten 30jährigen Periode im Jahresdurchschnitt um 9% an.*

Um dieses Entwicklungstempo in der Heranbildung von Ingenieuren als eine Kennziffer für die Bewegung auf dem Gebiet der technischen Arbeit akzeptieren zu können, müssen wir noch einige Umstände in Betracht ziehen.

Vor allem ist zu erwägen, in wieweit sich die innere Struktur des Universitäts- bzw. Hochschulbildungsganges und vornehmlich das Verhältnis zwi-

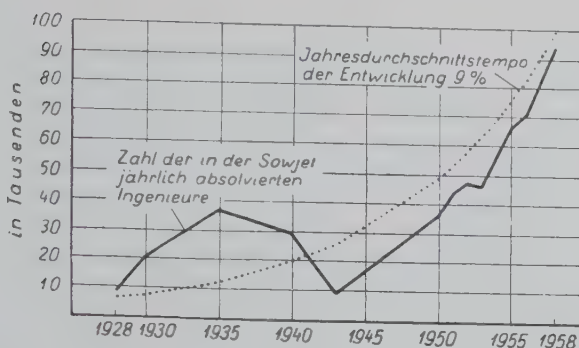


Abb. 1

schen der Zahl der Studenten technischer Fachrichtungen zu der nicht-technischen Fachrichtungen in diesen 30 Jahren geändert hat.

Die Absolventen technischer Hochschulen in Prozenten der gesamten Hochschülerschaft

1928.....	31
1930.....	47
1935.....	45
1940.....	29
1945.....	18
1950.....	28
1956.....	27
1960.....	(Schätzung) 29—30

In der Zeit vor 1928 studierte ein Großteil der Hochschulhörer nicht auf technischen Hochschulen, so daß der Anteil der Ingenieure relativ niedrig lag (eine Erscheinung, die nicht bloß das zaristische Rußland, sondern den Hochschulunterricht sämtlicher kapitalistischer Länder kennzeichnete und auf deren Gründe hier nicht eingegangen werden soll); 1928 hatten hingegen bereits 31% sämtlicher Hochschüler irgend ein Ingenieurfach belegt. In den dreißiger Jahren stieg dieser Anteil der Ingenieursanwärter ständig an, um schließlich 45—47% zu erreichen, so daß nahezu jeder zweite sowjetische Hochschüler auf einer Ingenieursfakultät inskribiert war. Ein nach 1935 eingetretener vorübergehender Rückgang hatte eine Zeitlang ein Absinken dieses Anteils auf 20—25% zur Folge, doch erhöhte er sich nach dem Kriege neuerdings und schwankte in den letzten Jahren durchschnittlich zwischen 27 und 30%.

Innerhalb je eines kürzeren Zeitabschnittes nimmt der Anteil recht extreme Werte an. Betrachtet man jedoch eine längere Periode, dann ergibt sich, daß der Anteil der technischen Hochschüler an der Gesamtzahl der Hörer 30% beträgt. Auch in den letzten 10 Jahren, der Zeit der gleichmäßigen Entwicklung nach dem Kriege, ändert sich an diesem Verhältnis nichts, ja es beginnt zu einer allgemeinen Erscheinung zu werden, daß annähernd ein Drittel sämtlicher Hochschüler ein Ingenieurfach studiert.

Als zweiter wesentlicher Umstand muß das gegenseitige Verhältnis der Zahl von Ingenieuren und Technikern berücksichtigt werden. Die Techniker stellen einen erheblichen Teil der technischen Intelligenz dar, weshalb außer der absoluten Zahl absolvierter Ingenieure auch die Änderungen im Verhältnis dieser Zahl zu derjenigen der Techniker in Betracht zu ziehen sind. In der Sowjetunion absolvierten im Jahre 1928 9000 Ingenieure und 7000 Techniker. Dieses Verhältnis entsprach dem volkswirtschaftlichen Bedarf schon damals nicht, weshalb bereits 1928 ein Beschluß zur Änderung dieses Verhältnisses gefaßt wurde,⁵ der festlegte, daß sich die Zahl der Ingenieure zu derjenigen der Techniker wie 2 : 3 verhalten solle. In der Zeit zwischen 1928 und 1940 ergab sich aber auf dem Gebiet der Ausbildung keine Verbesserung des bestehenden Verhältnisses, vielmehr war man erst nach dem Kriege so weit, daß die Zahl der Absolventen von Techniken diejenige der absolvierten Ingenieure wesentlich überstieg.

Jahr des Studienabschlusses	Zahl der absolvierten		
	Ingenieure	Techniker	Verhältnis
1930.....	21 000	14 000	1 : 0,6
1935.....	37 000	45 000	1 : 1,2
1940.....	30 000	30 000	1 : 1
1950.....	36 000	104 000	1 : 3
1956.....	71 000	220 000	1 : 3

In den Betrieben der Sowjetunion lag das Verhältnis zwischen der Zahl der Ingenieure und der der Techniker in Wirklichkeit anders, als man nach den Ziffern über die Schulbildung erwarten konnte, da der Arbeitskreis von Technikern nicht bloß von Absolventen der Techniken, sondern auch von erfahrenen, geübten Werksangehörigen versehen wurde. Nach dem Kriege trat eine wesentliche Verschiebung im Verhältnis zwischen der Zahl der Absolventen von Techniken und derjenigen der Hochschulabsolventen ein, und die im Arbeitskreis eines Technikers Beschäftigten erwarben sich in zunehmendem Maße die erforderliche Schulbildung. Diese Verschiebung in den Proportionen der Heranbildung von Ingenieuren und Technikern weist gleichfalls darauf hin, daß die Ingenieurarbeit mit einer Zunahme der Technikerarbeit einhergeht. In der vergangenen 30 Jahren änderten sich die Proportionen derart, daß sie von einem anfänglichen Verhältnis von 1 : 1 über das 1928 vorgeschriebene Verhältnis von 2 : 3 in Richtung des Nachkriegsverhältnisses 1 : 3 verlaufen. Wenn man auch die im Verhältnis der Zahl von Ingenieuren zur Zahl von Techni-

⁵ Entschließung des Plenums der KPdSU zur Änderung des bestehenden Verhältnisses zwischen der Zahl der Ingenieure und derjenigen der Techniker auf Grund einer Analyse der damaligen Lage und der Erfordernisse des ersten Fünfjahrplanes.

kern eintretende Verschiebung berücksichtigt, dann bedeutet dies, daß die jährliche Zunahme auf dem Gebiet der ingenieur-technischen Arbeit in der Sowjetunion höher liegt als 9%.

Eine komplexere Erscheinung als das Größenverhältnis zwischen Ingenieur- und Technikerzahl bildet das Verhältnis der Zahl von Ingenieuren zur Zahl der Wissenschaftler. Im Jahre 1929 gab es in der Sowjetunion 1263 wissenschaftliche Institute (unter diesen 438 Forschungsanstalten). Bis 1950 stieg die Zahl der Institute auf 2756 (die der Forschungsanstalten auf 1264) an, und eine Verschiebung ergab sich auch zu gunsten der großen, mit bedeutender technischer Ausrüstung versehenen Institute. Die Zahl der Forschungsinstitute hat sich in 30 Jahren nahezu verdreifacht, während die Zahl der Forscher eine noch größere Zunahme aufweist. Über die Zahl der Gelehrten stehen seit 1940 folgende Unterlagen zur Verfügung:

Jahr	Ingenieure	Gelehrte	Verhältnis
1940.....	290 000	98 000	1 : 0,29
1956.....	712 000	240 000	1 : 0,30

Die Periode der Ausgestaltung eines gewissen Größenverhältnisses zwischen Ingenieur- und Gelehrtenzahl fällt in die dreißiger Jahre. Sie erfährt eine Unterbrechung durch den Krieg, doch zeigen sich 1950 bereits wieder die vor dem Kriege bestandenen Größenverhältnisse. Neueren Unterlagen zufolge steigt mit der Zunahme der Zahl von Ingenieuren relativ verhältnismäßig auch die Zahl von Gelehrten an, so daß die Zuwachsrate auf diesem Gebiet der technischen intellektuellen Arbeit im großen und ganzen mit der durch das Tempo der Heranbildung von Ingenieuren bestimmten Zuwachsrate übereinstimmt.

Zusammenfassend läßt sich also mit gewissen Modifikationen und Kontrollberechnungen die Feststellung akzeptieren, daß der zahlenmäßige Verlauf der Heranbildung von Ingenieuren (die Zahl der absolvierten Ingenieure) — eine längere Zeitspanne betrachtet —, die größenmäßige Gestaltung der technisch-intellektuellen Arbeit zum Ausdruck bringt. Der Umstand, daß sich in der Sowjetunion, von einer verhältnismäßig kurzen Übergangsperiode abgesehen, im Verhältnis der Zahl von Absolventen technischer Hochschulen zur Zahl jener, die keine technische Hochschule besucht haben, eine gewisse Beständigkeit erkennen läßt, und daß dieses Größenverhältnis im großen und ganzen identisch ist mit den in den letzten zehn Jahren zustande gekommenen Proportionen, beweist, daß das raschere Entwicklungstempo der Heranbildung von Ingenieuren nicht auf Kosten anderer Wissenschaftszweige eingehalten wurde.

Da das Verhältnis zwischen Ingenieur- und Technikerzahl in der Sowjetunion in 30 Jahren eine wesentliche Verschiebung erfahren hat und in letzter Zeit der Anteil der Techniker verhältnismäßig höher liegt als früher, kamen wir

bei der Übersicht über die Techniker zu dem Schluß, daß die tatsächliche technisch-intellektuelle Arbeit in höherem Maße angewachsen ist, als dies aus der Zahl der absolvierten Ingenieure vermutet werden könnte. Schließlich bildete sich das Größenverhältnis zwischen der Zahl der Ingenieure und der der Gelehrten bereits 1940 heraus, und darin verursachte bloß der Krieg vorübergehend einen Bruch. Die Tendenz auf diesem Gebiete weist gleichfalls eher in Richtung einer — wenn auch langsameren — Zunahme der Zahl von Gelehrten im Vergleich zu der der Ingenieure.

Unter Berücksichtigung dieser Ergänzungen kann zusammenfassend festgestellt werden, daß *die technisch-intellektuelle Arbeit in der Sowjetunion im Verlauf der letzten 30 Jahre durchschnittlich um 10% jährlich zugenommen hat.*

Die technisch-intellektuelle Arbeit in den Vereinigten Staaten

Gelegentlich der 1930 veranstalteten Volkszählung wurden in den Vereinigten Staaten 151 000 Inhaber eines Ingenieurdiploms gezählt. Im gleichen Jahre erhielten weitere 7000 junge amerikanische Ingenieure ihr Diplom. Berücksichtigt man die jährlichen Ausfälle durch Ableben, Pensionierung, Erreichen der Altersgrenze usw., dann brachten die neuen Diplome in den Vereinigten Staaten kaum eine Veränderung im Bestand an Ingenieuren. Nach den dreißiger Jahren zeigt sich eine langsame Zunahme der Zahl von Ingenieuren, eine wesentlichere Änderung trat aber eigentlich erst während der Kriegsvorbereitungen im zweiten Weltkrieg ein.⁶

Die Zusammenfassung der Zahl von absolvierten Ingenieuren in den Vereinigten Staaten während der letzten 30 Jahre ergibt folgendes Bild:

Jahr	Zahl der absolvierten Ingenieure ⁷ (in Tausenden)
1930.....	7
1939.....	13
1940.....	14
1942—45.....	14
1948.....	31
1950.....	52
1951.....	42
1952.....	30
1953.....	24
1954.....	22
1955.....	23
1956.....	30
1957.....	31
1958.....	35

Wie in der Sowjetunion lassen sich auch in den Vereinigten Staaten auf dem Gebiet der Heranbildung von Ingenieuren mehrere Perioden erkennen.

⁶ Gegenwärtig erfolgt die Ausbildung der technischen Intelligenz in den Vereinigten Staaten an 80 Technischen Universitäten und auf 32 Spezialhochschulen. Sie wird durch zahlreiche Spezial-Betriebslehreurse und durch halbbetriebliche Ausbildung ergänzt.

⁷ Ohne Agronomen, nur Hörer der allgemeinen sowie der Fakultäten für Bau- und Verkehrswesen und für Nachrichtentechnik.

In der Sowjetunion war die Entwicklung vor dem Krieg gleichmäßig und nach oben gerichtet, während in den Vereinigten Staaten zur gleichen Zeit eine Stagnation zu beobachten war und die Zahl der Ingenieure kaum zunahm. Während des Krieges war die Lage in der Sowjetunion auch auf diesem Gebiet schwierig, wogegen die Ingenieurausbildung in den Vereinigten Staaten unter dem Einfluß der Kriegskonjunktur ihren Höchststand erreichte. Nach dem Übergang zur Friedensproduktion zeigt sich jedoch in den USA ein Rückfall, in der Sowjetunion hingegen eine gleichmäßige, rasche Entwicklung. Sieht man bei der Heranbildung der Ingenieure auch in den Vereinigten Staaten — wie weiter oben in der Sowjetunion — von der Periodizität ab, dann läßt sich feststellen, daß die Zahl der Ingenieure in den Vereinigten Staaten jährlich um etwa 5% zunimmt.

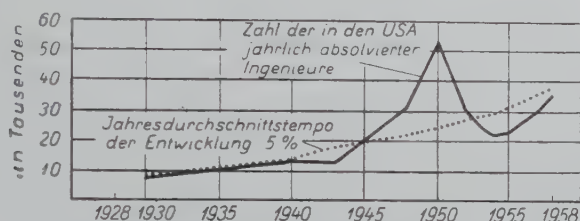


Abb. 2

Um feststellen zu können, inwieweit das berechnete Tempo die Zunahme der technisch-intellektuellen Arbeit zum Ausdruck bringt, wird es auch hier erforderlich sein, die im Falle der Sowjetunion bereits erwähnten Umstände in Erwägung zu ziehen.

Auch hier muß berücksichtigt werden, wie sich die Zahl der Ingenieure zur Zahl der sonstigen Hochschulabsolventen (also der Nicht-Ingenieure) in den einzelnen Zeitabschnitten verhält. Hierüber gibt folgende Tabelle Aufschluß:

Jahr	Zahl der Ingenieure in Prozenten sämtlicher Hochschulabsolventen
1926—30.....	7
1931—35.....	7
1936—40.....	8
1941—45.....	8
1950.....	12
1951—53.....	10
1954—55.....	8

In den Vereinigten Staaten ist der Anteil der Hörer technischer Universitäten an der Gesamtzahl sämtlicher Hochschüler — wie in den kapitalistischen Ländern allgemein — niedriger als in der Sowjetunion, wo er gegenüber dem amerikanischen Anteil von 8—12% im Durchschnitt 30% beträgt. Wäh-

rend der untersuchten 30 Jahre gab es in den Vereinigten Staaten zwar Schwankungen, im wesentlichen änderten sich jedoch die Verhältnisse auf diesem Gebiet nicht.

Bei der Beurteilung des Hochschulunterrichts in den Vereinigten Staaten muß aber berücksichtigt werden, daß an den technischen Hochschulen im Vergleich zu anderen Ländern in höherer Zahl Physiker, Chemiker und Mathematiker ausgebildet werden. Schätzungsweise arbeiten rund 20% der Absolventen dieser Fächer später in Arbeitskreisen, die Ingenieuren vorbehalten sind. Zieht man auch dies in Betracht, dann schwankt der Anteil der Heranbildung von Arbeitskräften für Ingenieurarbeiten zwischen 15 und 18% sämtlicher Hochschüler.

Größere Schwierigkeiten bereitet die Beurteilung der Frage, wie sich in Amerika die Zahl der Ingenieure zu jener der Techniker verhält, da man sich diesbezüglich nur auf ganz vage Schätzungen zu stützen vermag. Techniker werden nämlich in Amerika für gewöhnlich innerhalb der Betriebe, häufig auf Spezial-Betriebsschulen und -kursen ausgebildet. Aus den bestehenden Arbeitskreis-Proportionen zu schließen, ist jedoch die Zahl der Techniker im Vergleich zu jener der Ingenieure in Amerika ebenso im Zunehmen begriffen wie in der Sowjetunion.

Das Verhältnis der Gelehrtenzahl zur Zahl der Ingenieure und das Problem der Gelehrten überhaupt trat während des Krieges und besonders nach dem Krieg in den Vordergrund. Eine Betrachtung der rohen statistischen Daten läßt erkennen, daß die die Gelehrtenarbeit mehr oder weniger zum Ausdruck bringende wissenschaftliche Qualifikation von den dreißiger Jahren bis 1945 kaum zunimmt. Erst nach dem Kriege zeigt sich ein Anwachsen der höheren wissenschaftlichen Qualifikation, eine Zunahme der Zahl jener, die den Doktorgrad erreichen.

Jahr	Zahl der an amerikanischen Universitäten zu Doktoren promo- vierten Hörer
1930.....	1000
1935.....	1500
1940.....	1800
1945.....	800
1948.....	2200
1950.....	3600
1955.....	4900

Das Verhältnis der Gelehrtenzahl zur Zahl der Ingenieure wurde in den Vereinigten Staaten schon vor dem Krieg, besonders aber während des Krieges und unmittelbar nach dessen Ende durch den Umstand beeinflusst, daß eine beachtliche Zahl europäischer Gelehrter nach Amerika auswanderte oder hinausgelangte.⁸

⁸ Laut Schätzungen hat ein Viertel der amerikanischen Gelehrten seine Studien nicht in den USA absolviert.

Das gegenwärtige Verhältnis der Gelehrten- zur Ingenieurzahl veranschaulicht folgende Zusammenstellung:

Jahr	Ingenieure	Gelehrte	Verhältnis
1930.....	215 000	46 000	1 : 0,2
1956.....	500 000	250 000	1 : 0,5

Wenngleich das Tempo der Zunahme bei den wissenschaftlichen Qualifikationen und bei der Erlangung des Doktorgrades langsamer ist als bei den Ingenieurdiplomen, zeigt sich bei dem Verhältnis Gelehrte: Ingenieure dennoch eine raschere Erhöhung. Wie bereits erwähnt, ist dies u. a. darauf zurückzuführen, daß das wissenschaftliche Forschungs- und Entwicklungsniveau in den Vereinigten Staaten durch die in den letzten Jahrzehnten ausgewanderten und durch die vor den faschistischen Verfolgungen geflüchteten europäischen Gelehrten weitgehend verändert und erhöht wurde. Freilich stellt dies nur eine vorübergehende Erscheinung dar, da die Möglichkeit, die Zahl wissenschaftlich tätiger Gelehrter durch europäische bzw. eingewanderte Gelehrte zu erhöhen, letzten Endes dennoch beschränkt ist, so daß man es versteht, wenn in den letzten Jahren zahlreiche Studien und Berichte von einer »Rückständigkeit in der wissenschaftlichen Forschungsarbeit« sprechen.

Zusammenfassend läßt sich also die Schlußfolgerung ziehen, daß in der Hochschulstruktur der Vereinigten Staaten in den letzten 30 Jahren keine Veränderungen eingetreten sind; auch weist das Verhältnis der Zahl von Ingenieuren zur Zahl von Technikern sowie das Verhältnis der Zahl von Ingenieuren zur Zahl der Gelehrten darauf hin, daß eher eine Zunahme der technisch-intellektuellen Arbeit zu verzeichnen war, wie sie in dieser Stärke aus der Zahl absolvierter Ingenieure nicht vermutet werden kann. Unter Berücksichtigung der vorangegangenen Ausführungen *vermehrte sich die technisch-intellektuelle Arbeit in den Vereinigten Staaten im Laufe der letztvergangenen 30 Jahre um annähernd 5—5,5% jährlich.*

Über das Entwicklungstempo der Industrie

Nachdem wir vorstehend geprüft haben, wie sich die technisch-intellektuelle Arbeit größtmäßig gestaltet hat, wollen wir uns nun der Entwicklung in der Industrie der beiden Länder zuwenden.⁹

Im Jahre 1929, von dem an wir die größtmäßige Gestaltung der technisch-intellektuellen Arbeit untersuchen, übertraf die industrielle Produktion

⁹ Das Tempo der Produktionssteigerung in der Industrie ist eines der volkswirtschaftlich und statistisch am besten erfaßten Gebiete. Die hier benützten Daten stammen zum Großteil aus einer Publikation des sowjetischen Akademikers Strumilin.

der Sowjetunion — wenn auch nicht bedeutend — diejenige der Vorkriegszeit. Von 1929 an gestaltete sich die industrielle Produktion in der Sowjetunion folgendermaßen:

Jahr	Höhe der industriellen Produktion (Milliarden Rubel)	Index % (1913 = 100)
1929.....	10,7	158
1937.....	39,7	588
1950.....	100,0	1476
1955.....	184,0	2729
1956.....	204,0	3021
1957.....	224,0	3320

Auch auf dem Gebiet der industriellen Produktion zeichnen sich die bereits früher erwähnten Entwicklungsperioden, die Perioden der Vor- und der Nachkriegszeit ab. Während der fraglichen 30 Jahre erreicht das durchschnittliche Entwicklungstempo in der industriellen Produktion der Sowjetunion rund 10% jährlich.

Dieses durchschnittliche jährliche Entwicklungstempo kommt zustande, indem es

zwischen 1930 und 1940 um jährlich 16,5% anstieg,
 zwischen 1941 und 1945 um jährlich 1,7% sank,
 zwischen 1945 und 1955 um jährlich 15,9% anstieg.

Die industrielle Produktion in den Vereinigten Staaten gestaltete sich in der gleichen Zeitspanne — von 1929 an gerechnet — folgendermaßen (gleichfalls in Rubel gerechnet):

Jahr	Höhe der industriellen Produktion (Milliarden Rubel)	Index % (1913 = 100)
1929.....	123	196
1937.....	126	202
1950.....	245	391
1955.....	304	485
1956.....	312	499
1957.....	312	499

Die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate in der industriellen Produktion der Vereinigten Staaten beträgt mithin 3,2%. Sie errechnet sich wie folgt:

Zwischen 1930 und 1940 jährliche Zunahme 1,0%,
 zwischen 1941 und 1945 jährliche Zunahme 9,8%,
 zwischen 1945 und 1955 jährliche Zunahme 4,7%.

Bei Beurteilung der Zuwachsraten in der industriellen Produktion lohnt es sich zu untersuchen, wie sich das Produktionsniveau in der Sowjetunion zu dem der Vereinigten Staaten verhielt und wie es sich im Vergleich zu letzterem änderte. Nach Strumilin zeigte die industrielle Produktion in der Sowjetunion im Verhältnis zu derjenigen in den Vereinigten Staaten in den letzten 30 Jahren folgenden Verlauf:

Jahr	Industrielle Produktion in der Sowjetunion in Prozenten derjenigen der Ver. Staaten
1929.....	8,7
1937.....	31,5
1950.....	40,8
1955.....	60,5
1956.....	65,4
1957.....	71,8

In der Sowjetunion machte also 1957 die industrielle Produktion 72% der in den Vereinigten Staaten festgestellten Produktion aus. Strumilin stellte Berechnungen darüber an, wie sich das Verhältnis zwischen den Produktionsziffern der beiden Staaten in der folgenden Zeit gestalten wird. Seine Berechnung erstreckte sich auf zwei Gesichtspunkte bzw. Perioden. Zum ersten berechnete er, wie vieler Jahre es bedarf, bis die Sowjetunion die Vereinigten Staaten hinsichtlich des allgemeinen Umfanges ihrer industriellen Produktion einholt bzw. überflügelt. Da die Bevölkerungszahl in der Sowjetunion um rund 20% höher liegt als die in den Vereinigten Staaten, errechnete Strumilin zum zweiten, wieviel Zeit die Sowjetunion benötigen wird, um die Vereinigten Staaten auch in der Pro-Kopf-Produktion einzuholen bzw. zu übertreffen. Beide Berechnungen wurden in zwei Variationen (I und II) durchgeführt. In beiden Fällen geht Strumilin von dem bereits erreichten Produktionsniveau aus, um in einem Fall auf der Voraussetzung weiterzuschreiten, daß die Sowjetunion das bisherige Entwicklungstempo beibehält, im zweiten Fall hingegen die »schlechteste« Eventualität zu supponieren, daß sich nämlich das sowjetische Entwicklungstempo mit zunehmender Annäherung an den Umfang der amerikanischen Produktion »verlangsamt« und deren Entwicklungstempo übernimmt.

Den Berechnungen Strumilins zufolge vermag die Sowjetunion im Falle I die Vereinigten Staaten in der Gesamtproduktion bereits 1962 zu überflügeln, während sie hierzu in der Pro-Kopf-Produktion noch weitere zwei Jahre benö-

tigt und spätestens 1964/65 an die Spitze vorstoßen kann. Im Falle II kann die Sowjetunion, obwohl das Tempo des Fortschritts irreal verlangsamt angesetzt ist, die Vereinigten Staaten auf dem Gebiet der Gesamtproduktion berechnungsgemäß bereits 1964, in der Pro-Kopf-Produktion hingegen spätestens 1970/71 überholen.

Die Sowjetunion nähert sich auf dem Gebiet der industriellen Produktion in zunehmendem Maße den Produktionsziffern des höchstentwickelten kapitalistischen Landes und wird diese voraussichtlich innerhalb eines Jahrzehnts einholen, ja sogar überflügeln. Die im Vergleich zu den kapitalistischen Ländern schnellere, gleichmäßige Entwicklung stellt das gemeinsame Resultat zahlreicher Voraussetzungen dar, so u. a. ein Ergebnis der Tatsache, daß die Heranbildung der technischen Intelligenz und die technische und wissenschaftliche Arbeit im Vergleich zu den Verhältnissen in den kapitalistischen Ländern eine bessere Entwicklung zeigt. Diese Entwicklung hat dazu geführt, daß die Sowjetunion die Vereinigten Staaten in der Gesamtzahl von Ingenieuren bereits zur Zeit des zweiten Weltkrieges, im Verhältnis der Zahl von Ingenieuren zur Gesamtbevölkerung bzw. zur Zahl der in der industriellen Produktion beschäftigten Werktätigen hingegen in den Jahren 1955/56¹⁰ erreicht und seither bereits weit überflügelt hat.

Einige Schlußfolgerungen

Im Verlauf unserer bisherigen Ausführungen befaßten wir uns mit einigen grundlegenden Problemen und einigen wichtigeren Zusammenhängen auf dem Gebiet der technisch-intellektuellen Arbeit:

1. Wir wiesen nach, welchen Verlauf die die technisch-intellektuelle Arbeit repräsentierende Heranbildung von Ingenieuren in den beiden wirtschaftlich hochentwickelten Ländern während der letzten 30 Jahre genommen hat. Auf Grund der Daten über den 30jährigen Zeitabschnitt ermittelten wir die Zuwachsrate in der Heranbildung von Ingenieuren, *die in der Sowjetunion trotz der kriegsbedingten Ausfälle doppelt so hoch lag wie im höchstentwickelten kapitalistischen Land*. Die Daten dieser 30 Jahre ließen deutlich erkennen, daß sich auf diesem Gebiet in beiden Ländern mehrere Perioden — Vor- und Nachkriegsperioden mit der dazwischen liegenden Periode des Krieges — unterscheiden lassen. Vor dem Kriege verlief die Zunahme in der Sowjetunion gleichmäßig und in raschem Tempo, während in den Vereinigten Staaten eine Stagnation, ja sogar ein Rückgang eintrat. Im Kriege zeigt die Heranbildung von Ingenieuren in der Sowjetunion einen Stillstand, wogegen sich in den USA

¹⁰ Im Jahre 1956 gab es in der Sowjetunion rund 700 000, in den Vereinigten Staaten 500 000 Diplomingenieure. Da die Bevölkerungszahl der Sowjetunion um rund 20% höher liegt als die der USA, steht die Sowjetunion nicht bloß absolut, sondern auch relativ an der Spitze.

eine konjunkturelle Zunahme ergibt. Nach dem Kriege erreichte die Sowjetunion in verhältnismäßig kurzer Zeit das Vorkriegsniveau, und auch seither zeigt sich dort eine kontinuierliche, gleichmäßige Fortentwicklung, in den USA hingegen ein starker Rückfall nach der Kriegskonjunktur und eine auch gegenwärtig anhaltende Stagnation.

2. Vom Gesichtspunkt der technisch-intellektuellen Arbeit prüften wir den Verlauf der industriellen Produktion und das Tempo der Produktionssteigerung in der Industrie während der untersuchten 30 Jahre. Von der bereits beschriebenen periodischen Schwankung abgesehen, *liegen die jährlichen durchschnittlichen Zuwachsraten der industriellen Produktion und das Anwachsen der technisch-intellektuellen Arbeit nahe beinander, und ein ähnlicher Zusammenhang besteht auch in den Vereinigten Staaten.*

Den üblichen Korrelationsberechnungen gemäß ist die Beziehung zwischen dem Tempo der Produktionssteigerung und der Zunahme der technisch-intellektuellen Arbeit in der Sowjetunion um 0,9 höher und liegt in den USA um 0,8, d. h. in beiden Ländern läßt sich eine »enge« größtmäßige Änderungsbeziehung zwischen der technisch-intellektuellen Arbeit und dem Entwicklungstempo der Produktionssteigerung in der Industrie beobachten.

Die besprochenen Daten ließen erkennen, daß die Produktion der Sowjetunion im Jahre 1955 rund 60% der industriellen Erzeugung in den Vereinigten Staaten erreichte, und daß sie hinsichtlich der Zahl der Ingenieure schon zu jener Zeit — 1955 — auf dem Niveau der Vereinigten Staaten stand. *In bezug auf eine äußerst wichtige Voraussetzung des technischen Fortschritts hat die Sowjetunion mithin die kapitalistische Produktion um rund zehn Jahre früher erreicht. In der sozialistischen Wirtschaft besteht die Möglichkeit — und es verhält sich auch in Wirklichkeit so —, daß sich eine solche Bedingung, wie etwa die wissenschaftlich-technischen Kenntnisse, im Vergleich zur Produktion nicht nachträglich, sondern gleichzeitig, in gewissem Umfang schneller entwickelt, und daß diese Vorbedingung des technischen Fortschritts als bestimmender Umstand figuriert, dessen Größe in enger Wechselwirkung mit dem Tempo der Produktionsfortschritte zur Entfaltung gelangt.*

Die Tatsache, wonach die technisch-wissenschaftliche, die Ingenieur- und Techniker-, mit einem Wort die technisch-intellektuelle Arbeit eine der Voraussetzungen für die Entwicklung der Produktion bildet, ist auch den Ökonomen der kapitalistischen Staaten nicht unbekannt. In den letzten Jahren wurden in fast allen Staaten Berechnungen angestellt und Feststellungen gemacht. Doch während sie die Mittel und Wege zu ihrer Verwirklichung suchen, stoßen sie auf die Widersprüche des Kapitalismus und sind außerstande, die Voraussetzungen einer planmäßigen, gleichmäßigen und raschen Entwicklung der technisch-intellektuellen Arbeit zu schaffen.

Die Erfahrungen der Sowjetunion zeigen, daß die größtmäßige Gestaltung der technisch-intellektuellen Arbeit in der sozialistischen Wirtschaft nicht

spontan vor sich geht und keineswegs eine Funktion konjunktureller Schwankungen bildet, daß sie vielmehr ein Produkt der bewußten Erkenntnis und das Resultat der planmäßigen Lenkung der Volkswirtschaft darstellt.

Schließlich muß bemerkt werden, daß sich die Daten der beiden Länder zwar für Berechnungszwecke, *zur Aufdeckung der Grundtendenzen und der Entwicklungsproportionen eignen, daß sie jedoch keine geeignete Grundlage für den Vergleich des tatsächlichen Niveaus der technisch-intellektuellen Arbeit in den beiden Ländern bilden.*

Die angewandte Methode ist in erster Linie deshalb ungeeignet, weil die Zahl der Ingenieure nur die mengenmäßige Seite der technisch-intellektuellen Arbeit zum Ausdruck bringt, also nicht auch ihr Niveau und ihre Intensität anzeigt, ganz zu schweigen davon, daß zur technisch-intellektuellen Arbeit auch die Arbeit der Forscher, Gelehrten und Techniker, ja bis zu einem gewissen Grade auch die der Ökonomen hinzuzuzählen ist, und daß die Arbeit der technischen Intelligenz zu einem nicht geringen Teil auch durch das fachliche Niveau der Arbeiterschaft bestimmt wird.

Unterschiedlich ist die technisch-intellektuelle Arbeit auch in den einzelnen Produktionszweigen. Es liegt auf der Hand, daß etwa die Nachrichtentechnik oder die Instrumentenindustrie einen in Größe und Qualität anderen Bedarf an Entwicklungs- und an technisch-schöpferischer Arbeit hat als beispielsweise die Baustoffindustrie oder selbst einzelne Zweige der Maschinenindustrie. Um also die Lage in den beiden Ländern vergleichen und daraus folgern zu können, in welchem der beiden Länder die technisch-intellektuelle Tätigkeit auf höherem Niveau steht, müßte man auch die Unterschiede in Betracht ziehen, die im Produktionsgefüge der beiden Länder bestehen.

Einen der empfindlichsten Punkte eines solchen Vergleichs bilden die Techniker. Die Ingenieurarbeit an sich bildet trotz der Verschiedenheit der Ausbildung bis zu einem gewissen Grad zahlreiche Möglichkeiten zu Vergleichen, so daß auf diesem Gebiet die Abweichungen zwischen den einzelnen Ländern verhältnismäßig geringer sind als hinsichtlich der Vorkenntnisse, die zur Verrichtung der Arbeit eines Technikers verlangt werden. In einzelnen Ländern — so beispielsweise auch in den Vereinigten Staaten — wird man größtenteils auf Grund der Betriebspraxis zum Techniker, während sich die Techniker anderwärts aus einem gewissen Kreis von Fachingenieuren rekrutieren und in gewissen Fällen Mittelschulbildung gefordert wird. Häufig sind auch die Fälle, in denen sich ein Teil der Arbeiter die Kenntnisse eines Technikers im Betrieb aneignet, ohne über irgendeine Schulausbildung zu verfügen, während andererseits Techniker mit Mittelschulbildung in vielen Fällen als Arbeiter tätig sind.

Die technisch-intellektuelle Arbeit ist ein weites Gebiet, dessen Erfassung äußerst umständlich ist, da sich zwischen den verschiedenen Ländern große Unterschiede zeigen und auf diesem Gebiet bloß die ersten Schritte zu inter-

nationalen Gegenüberstellungen getan wurden, so daß man bisher nur zur Aufdeckung einiger weniger Beziehungen gelangt ist.

Die sozialistischen Länder entfalten und gestalten die technisch-intellektuelle Arbeit planmäßig, weshalb sie den Fragen des Bedarfs an Ingenieuren und Technikern sowie den Fragen der Versorgung mit den erforderlichen Kräften besondere Aufmerksamkeit widmen. In Ungarn ist gegenwärtig im Zuge der Vorbereitung des zweiten Fünfjahrplans eine eingehende Abwägung und Analyse im Gange, und jedes Unternehmen, jede Institution erwägt und plant den vorhandenen Bedarf an Ingenieuren und Technikern. Diese für jede Produktionseinheit durchzuführenden, eingehenden analytischen Berechnungen bilden die Grundlage für das Kapitel »Bedarf an Ingenieuren und Technikern und Versorgung mit diesen« im zweiten Fünfjahrplan und im perspektivischen Fünfzehnjahrplan. Darüber hinaus werden jedoch in der volkswirtschaftlichen Planung die allgemeinen Entwicklungstendenzen und die allgemeinen Beziehungen in Betracht gezogen. Hierzu wünscht auch diese Studie beizutragen.

Zusammenfassung

Die Abhandlung ist in der Hauptsache dem Umfang der technisch-intellektuellen Arbeit, ferner dem Zusammenhang zwischen industrieller Produktion einerseits und der Gelehrten-, Ingenieur- und Technikerarbeit andererseits gewidmet. Sie berichtet über die dreißigjährige Entwicklung in der Sowjetunion und über die Größenverhältnisse zwischen Gelehrten-, Ingenieur- und Techniker-Zahl. Verfasser ermittelt für die Sowjetunion und für die Vereinigten Staaten von Amerika die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate in der technisch-intellektuellen Arbeit. Sie betrug in den Jahren zwischen 1928 und 1958 in der Sowjetunion jährlich 10%, in den USA jährlich 5%. Es wird nachgewiesen, daß in beiden Ländern eine enge Korrelation zwischen dem Entwicklungstempo der Produktionssteigerung in der Industrie und der jährlichen Zunahme der technisch-intellektuellen Arbeit bzw. der Ingenieurausbildung besteht.

Der Unterschied in der Entwicklung der beiden Länder auf diesem Gebiet besteht darin, daß die Sowjetunion, obwohl sie 1955/56 nur etwa 60% der industriellen Produktion der USA erreichte, 1956 das höchstentwickelte kapitalistische Land in der absoluten und relativen Zahl von Ingenieuren bereits erreicht und seither weit überschritten hat. In dieser wichtigen Voraussetzung der industriellen Entwicklung, in der technischen Kultur, steht heute schon die Sowjetunion an der Spitze, und dies bildet die Gewähr dafür, daß sie auf dem Gebiet der Güterproduktion das höchstentwickelte kapitalistische Land erreichen und überflügeln wird.

Statistische Literatur

- Annuaire des Statistiques du Travail. Genève, 1958.
- Narodnoje hozjatswo SSSR Statistitscheski sbornik. Moskau, 1956.
- Die vierzigjährigen Erfolge der Sowjetmacht in Zahlen. Moskau 1957. Budapest 1958.
- Ekonomika Kapitalistitscheskich Stran. Moskau 1959.
- Engineering and Scientific Manpower in the United States, Western Europe und Soviet Russia, United States, Government Printing Office, Washington 1956.
- National Science Foundation: »Trends in the Employment and Training of Scientists and Engineers«, Government Printing Office, Washington, 1956.

I. HARSÁNYI, Budapest XI. Stoczek utca 4—6, Ungarn.

COMPLEX-PLANE CHARTS FOR OBTAINING CLOSED-LOOP FREQUENCY RESPONSES IN LINEAR CONTROL SYSTEMS

By

F. CSÁKI

Department for Special Electrical Machines and Automation,
Polytechnical University, Budapest

(Received August 23, 1960)

One of the fundamental objects of the control systems design is the determination of the closed-loop frequency response from the open-loop one. The former, namely, allows, on the one hand, to quickly evaluate the qualitative performance specifications of the control, and, on the other hand, by the aid of its real or imaginary component the time-functions may be obtained, too. Determination of the closed-loop frequency-response theoretically encounters no difficulties, nevertheless, the analytical evaluation is made difficult in practice, because calculations with complex quantities in five-six steps are necessary.

As a consequence of this, several graphical methods have been developed in engineering practice to solve the above mentioned problem. These may be found in the basic works [e. g. 1, 2, 3, 4]. One of the procedures means application of the NICHOLS-charts [1] in connection with the BODE-diagram [5, 1]. The other method is to plot one of the various complex-plane charts in connection with the magnitude-phase curves. Thus, for plotting the NYQUIST, MIKHAILOV, LEONHARD curves [6, 7, 8, 9], in order to obtain the stability criteria, various direct and inverse complex-plane charts may be employed, as shown in details in the fundamental works [1, 2, 3, 4, 10], and to be found as a new possibility also in a paper published recently [11].

Both the methods connected with the attenuation-frequency diagrams and with the magnitude-phase diagrams have certain advantages and disadvantages, and consequently followers and opponents. To avoid vain debates, the present paper does not take a standpoint in this respect, regarding as its task merely to examine systematically, what are the possibilities of plotting complex-plane charts, permitting to determine in a simple way the closed-loop frequency-response on the basis of the open-loop response, in linear systems. (The systematic investigation of the other problem will perhaps be discussed on another occasion.)

1. Statement of the problem

The block diagram of the most simple unity feedback control system is shown in Fig. 1. Denoting by s the complex variable of the Laplace transform, $R(s)$ being the reference input signal, $C(s)$ the controlled output signal and $E(s)$ the error signal. The open-loop transfer function is $G(s)$, while the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (1)$$

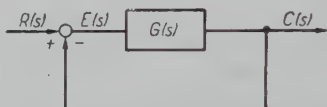


Fig. 1. Unit feedback system block diagram

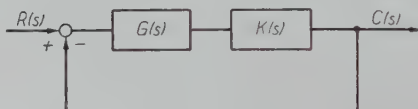


Fig. 2. Block diagram with a series stabilization

If the control system illustrated in Fig. 1 did not meet the control requirements, series, or parallel stabilizing elements are necessary. In the first case (Fig. 2) the open-loop transfer function is $G(s) K(s)$, while the closed-loop one

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s) K(s)}{1 + G(s) K(s)} \quad (2)$$

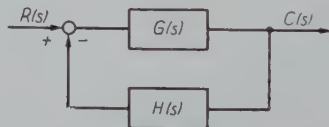


Fig. 3. Parallel stabilization. Block diagram of a general negative feedback system

In the second case (Fig. 3), when applying parallel stabilization, *i. e.* when there is no more unity feedback, the closed-loop transfer function is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad (3)$$

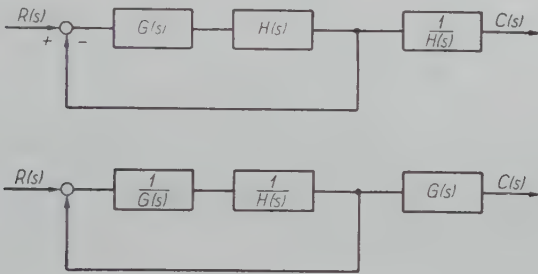
where $G(s)$ means the forward transfer function, while $H(s)$ the feedback transfer function. After some arrangements, relation (3) yields

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left[\frac{G(s) H(s)}{1 + G(s) H(s)} \right] \frac{1}{H(s)} \quad (4a)$$

and

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left[\frac{\frac{1}{\frac{G(s) H(s)}{1 + \frac{1}{G(s) H(s)}}}}{1 + \frac{1}{G(s) H(s)}} \right] G(s) \quad (4b)$$

Latter relations may be illustrated as shown in Figs. 4a and 4b, respectively.



Figs. 4a and 4b. Tracing back the general negative feedback system to the unit feedback system

Comparing the above relations, it is clear that expressions (2) and (3) are generalizations of expression (1). In spite of this it is evident that if we succeed in elaborating a method for determining the expression (1), this may be applied without more addendum to expression (2), simultaneously facilitating calculation of the transfer function (3) by permitting to adopt it at least to obtain the part of Eqs. (4a) and (4b) in square brackets. After this the whole expression (3) may be determined by a simple division, or multiplication.

Therefore, first of all, the possibilities for solving the problem denoted by expression

$$M(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (5)$$

will be dealt with in the following, that is, how and in how many ways the closed-loop transfer function $M(s)$ may be obtained in knowledge of the generalized open-loop transfer function $A(s)$.

2. Symbols

The complex quantities $M(s)$ and $A(s)$ figuring in expression (5), as well as their reciprocals are expressed aided by the following symbols, in canonical, polar and exponential forms:

$$M(s) = U + jV = M / \underline{\alpha} = M e^{j\alpha}$$

$$A(s) = X + jY = A / \underline{\varphi} = A e^{j\varphi}$$

and

$$\frac{1}{M(s)} = N(s) = u + jv = N / \underline{\beta} = N e^{j\beta}$$

$$\frac{1}{A(s)} = B(s) = x + jy = B / \underline{\psi} = B e^{j\psi}$$

where $N = \frac{1}{M}$; $B = \frac{1}{A}$; $\beta = -\alpha$; $\psi = -\varphi$; etc.

3. Possibilities of plotting complex-plane charts

The basic relation (5) may be expressed in the following forms aided by the quantities figuring in Eqs. (6):

$$M(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (7)$$

$$M(s) = \frac{1}{1 + B(s)} \quad (8)$$

$$A(s) = \frac{M(s)}{1 - M(s)} \quad (9)$$

$$A(s) = \frac{1}{N(s) - 1} \quad (10)$$

$$B(s) = N(s) - 1 \quad (11)$$

$$B(s) = \frac{1 - M(s)}{M(s)} \quad (12)$$

$$N(s) = 1 + B(s) \quad (13)$$

$$N(s) = \frac{1 + A(s)}{A(s)} \quad (14)$$

Each of the above eight equations (7)... (14) represents a conformal mapping. E.g. by the first Eq. (7) the complex plane $M(s)$ may be mapped onto the complex

reference plane $A(s)$. Let us denote this mapping by the symbol $A(s) [M(s)]$, while the chart arising from it, by the symbol $(A, \varphi, X, Y) [M, a, U, V]$. Latter wants to express that the circles $M = \text{const.}$, further the straight lines of $a = \text{const.}$, $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$ of the plane $M(s)$ appear in the ensemble of the polar co-ordinate system A, φ and of the Cartesian co-ordinate system X, Y of the reference plane $A(s)$ in form of the curves determined by relation (7). In this way on the network A, φ, X, Y the chart determined by the respective set of curves M, a, U, V is originated.

Let us call the chart *complete*, if all the four sets of curves are plotted in the ensemble of the polar and Cartesian co-ordinate systems of the reference plane. If one of the sets of curves is missing, let us term the chart *incomplete*. For example, $(A, \varphi, X, Y) [M, a, U, V]$ determines a complete chart, while $(A, \varphi) [M, a]$ or $(X, Y) [M, a]$ or $(A, \varphi, X, Y) [M, a]$ an incomplete chart within the group of the conformal mapping $A(s) [M(s)]$. Now the question arises, how many kinds of complex-plane charts can be plotted at all?

Evidently, equations (7) ... (14) permit only eight complete charts to be plotted, as the eight equations determine eight conformal mapping groups and to each conformal mapping belongs merely one complete chart ($8 \cdot 1^2 = 8$).

The number of the incomplete charts is much higher. The complex variable is perfectly determined by two data, e. g. solely by its polar, or by its canonical form, consequently, within the conformal mapping group $A(s) [M(s)]$ the following four incomplete charts are possible: $(A, \varphi) [M, a]$; $(X, Y) [M, a]$; $(A, \varphi) [U, V]$; $(X, Y) [U, V]$. In accordance with the eight mapping groups, altogether *thirty-two* such incomplete charts may be realized ($8 \cdot 2^2 = 32$).

Aside from the above limitation, even higher numbers are obtained. Choosing arbitrary k data from the possible 4 co-ordinate components, this may be realized in $\binom{4}{k}$ manners. Therefore, restricting ourselves to two data as a minimum, considering all of the eight mapping groups together

$$8 \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \right]^2 = 8 (1 + 4 + 6)^2 = 968$$

while restricting ourselves to one mapped component as a minimum, totally

$$8 \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \right] \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} \right] = 8 \cdot 15 \cdot 11 = 1320$$

possibilities open for plotting complex-plane charts. These are unexpectedly high numbers!

4. Some preliminary remarks

In any case, the above discussion convinces us of being more practicable to restrict ourselves, for the sake of a better perspicuity, to the conformal mapping groups instead of the possible charts, as the number of the cases is

at the most eight. In other words, only the complete charts will be discussed and thereby all of the incomplete charts are involved. Nevertheless, the method suggested does not mean an obligation to employ always and in all cases the complete charts. On the contrary, in some cases, if only because of a better perspicuity, neglectation of some sets of curves may seem advantageous, applying incomplete charts.

And now the question arises, what kind of informations should be offered by the plotted charts? First of all it must enlighten, if the closed-loop system is stable, or not, and to decide the stability, criteria must be furnished. (For example, on the basis of the course of curve $A(j\omega)$ or $B(j\omega)$ relative to point -1 , or the mapping of curve $A(j\omega)$ or $B(j\omega)$ with respect to the mapping of point -1 .) Moreover, it has to permit determination of the phase margin and gain margin, which are well-known notions generally applied in control engineering. (The first may be read from the intersection of $A(j\omega)$ and $B(j\omega)$, respectively, and of the unit circle, or from the mappings of both, while the second by the aid of the intersection of $A(j\omega)$ and $B(j\omega)$ respectively, and of the line determined by points 0 and -1 or on the basis of their mappings.) It has to be allowed to obtain the peak magnitude on the closed-loop frequency response curve $M(j\omega)$ (to settle the rough criterion $M_p < 1.4$ or $M_p < 1.3$), as well as to estimate the bandwidth (based on the frequency ω belonging to the intersection of the curves $M = 0.707$ and $M(j\omega)$ or their mappings) and so on.

It is to be emphasized that the above-mentioned stability and qualitative informations *may be obtained from all charts*, for the sake of brevity, however, full details regarding the individual charts will not be given, assuming the application of the above rules in an according sense, and only the possibilities of the readings will be referred to briefly.

After satisfying the stability criteria and meeting the rough design specifications, the claim to determine the transient time-function arises, too. For that purpose the method of FLOYD [2] and of SOLODOVNIKOV [10, 12] may be applied. In case of *unit step* input signal the time function of the output signal may be determined by expressions

$$m(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega)}{\omega} \sin t\omega \cdot d\omega \quad (15a)$$

or

$$m(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\omega)}{\omega} \cos t\omega \cdot d\omega + M(0) \quad (15b)$$

Similarly, in case of *unit impulse* input signal, the time function of the output signal may be expressed by

$$m'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \cos t \omega \cdot d\omega \quad (16a)$$

or

$$m'(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V(\omega) \sin t \omega \cdot d\omega \quad (16b)$$

Consequently, to apply the formulae, the real component $U(\omega)$ or the imaginary one $V(\omega)$ of the closed-loop frequency response $M(j\omega)$ must be known in function of the frequency. Thus the charts directly providing the co-ordinates U and/or V must be regarded as being advantageous, though it must be noted that knowing M and α , determination of the latter encounters no difficulties ($U = M \cos \alpha$ and $V = M \sin \alpha$), so reading M and α is perhaps sufficient.

Before introducing the complete charts, another general remark must be made. All of the conformal mappings given by Eqs. (7) . . . (14) belong to the well-known conformal mapping class

$$w(s) = \frac{a z(s) + b}{c z(s) + d} \quad ad - bc \neq 0 \quad (17)$$

determined by the linear fractional transformation. As is known, this mapping is, on the one hand, a one-to-one transform and, on the other hand, it transforms circles onto circles (regarding the straight line as a circle of infinite radius). All of the mapped curves are consequently straights or circles, so their construction is relatively simple. Just this is the great advantage of the complex-plane charts.

5. The eight conformal mappings and the eight complete charts

Now we are going to discuss one after the other the conformal mappings determined by Eqs. (7) . . . (14) and plotting also the complete charts, restricting ourselves to the range around the origin. The following formulae, of course, permit an arbitrary extension of the figures and the construction of intermediate curves, if necessary.

5.1. Mapping of the closed-loop plane $M(s)$ onto the open-loop plane $A(s)$

The mapping $A(s)$ [$M(s)$] is determined by Eq. (7). For plotting the complete chart (A, q, X, Y) [M, α, U, V] following equations serve (besides

the polar A, φ and Cartesian X, Y co-ordinate system being in the reference plane):

$$\left[(X+1) + \frac{1}{2(U-1)} \right]^2 + Y^2 = \left[\frac{1}{2(U-1)} \right]^2 \quad (7a)$$

$$(X+1)^2 + \left(Y - \frac{1}{2V} \right)^2 = \left(\frac{1}{2V} \right)^2 \quad (7b)$$

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2-1} \right)^2 + Y^2 = \left(\frac{M}{M^2-1} \right)^2 \quad (7c)$$

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right)^2 \quad (7d)$$

The above relations may be obtained from Eq. (7) as follows: On the one hand

$$M(s) = \frac{A(s)}{1+A(s)} = \frac{X+jY}{1+X+jY} = \frac{X^2+X+Y^2+jY}{(1+X)^2+Y^2}$$

On the other hand, considering Eq.(6):

$$U = \frac{X^2+X+Y^2}{(1+X)^2+Y^2} \quad M = \sqrt{\frac{X^2+Y^2}{(1+X)^2+Y^2}}$$

$$V = \frac{Y}{(1+X)^2+Y^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X^2+X+Y^2}$$

Latter relations yield consecutively the expressions (7a)...(7d) after some algebraic arrangements. (The formulae of the further cases may be obtained by similar derivations!).

It must be noted that the general form of equations (7a)...(7d) is

$$(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \varrho^2$$

the centre of the circles being determined by point $\xi + j\eta$, their radius, however, by ϱ .

The complete chart $(A, \varphi, X, Y) [M, \alpha, U, V]$ is shown in Fig. 5. This method of representation is the most widespread one, among the incomplete charts the type $(X, Y) [M, \alpha]$ or $(X, Y) [M]$ and $(X, Y) [\alpha]$ [e. g. 3] and the type $(A, \varphi) [M, \alpha]$ or $(A, \varphi) [M]$ and $(A, \varphi) [\alpha]$ [e. g. 2] are the most common ones.

The stability can be decided on the basis of the well-known NYQUIST criterion. The gain margin and the phase margin can easily be read. The peak M_p and the bandwidth can be obtained by the aid of the curves $M = \text{const.}$

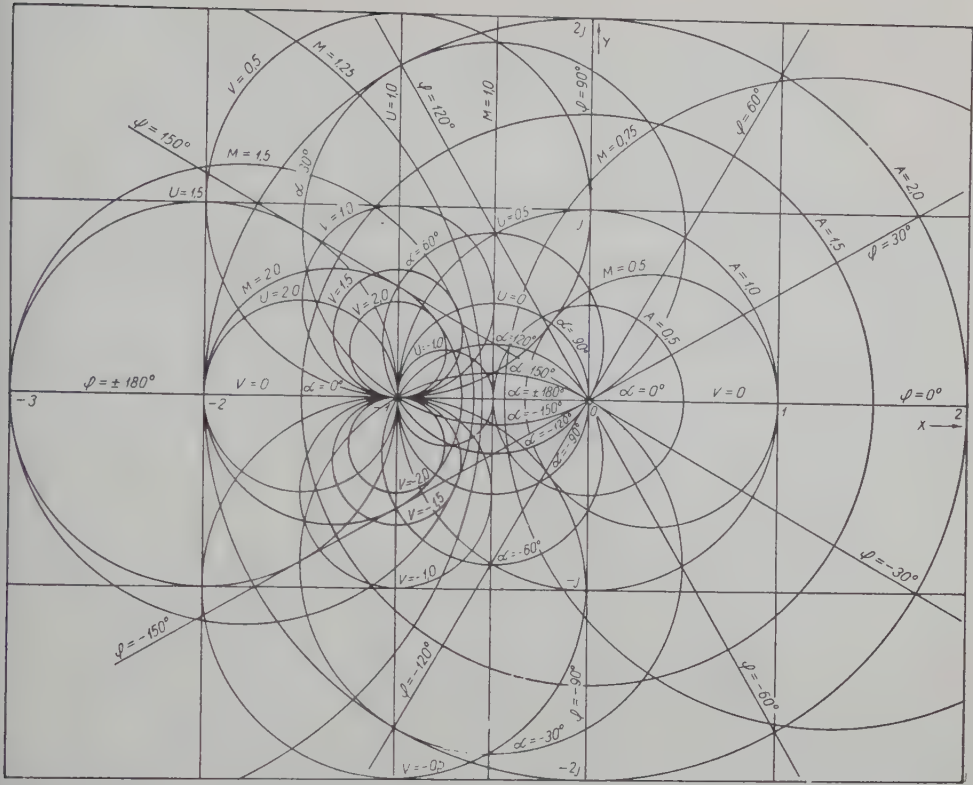


Fig. 5. Mapping of plane $M(s)$ onto the reference plane $A(s)$. Chart $(A, \varphi, X, Y) [M, a, U, V]$

Disadvantage of this method is that reading M , a , U , and V is somewhat cumbersome. The direct performance of the division and multiplication, respectively, corresponding to formulae (4a) and (4b) resp. is not simple, either.

5.2. Mapping of the closed-loop plane $M(s)$ onto the inverse open-loop plane $B(s)$

The mapping $B(s) [M(s)]$ is given by formula (8). To plot the complete chart $(B, \varphi, x, y) [M, a, U, V]$ (Fig. 6), following equations may be adopted:

$$\left[(x+1) - \frac{1}{2U} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2U} \right)^2 \quad (8a)$$

$$(x+1)^2 + \left[y + \frac{1}{2V} \right]^2 = \left(\frac{1}{2V} \right)^2 \quad (8b)$$

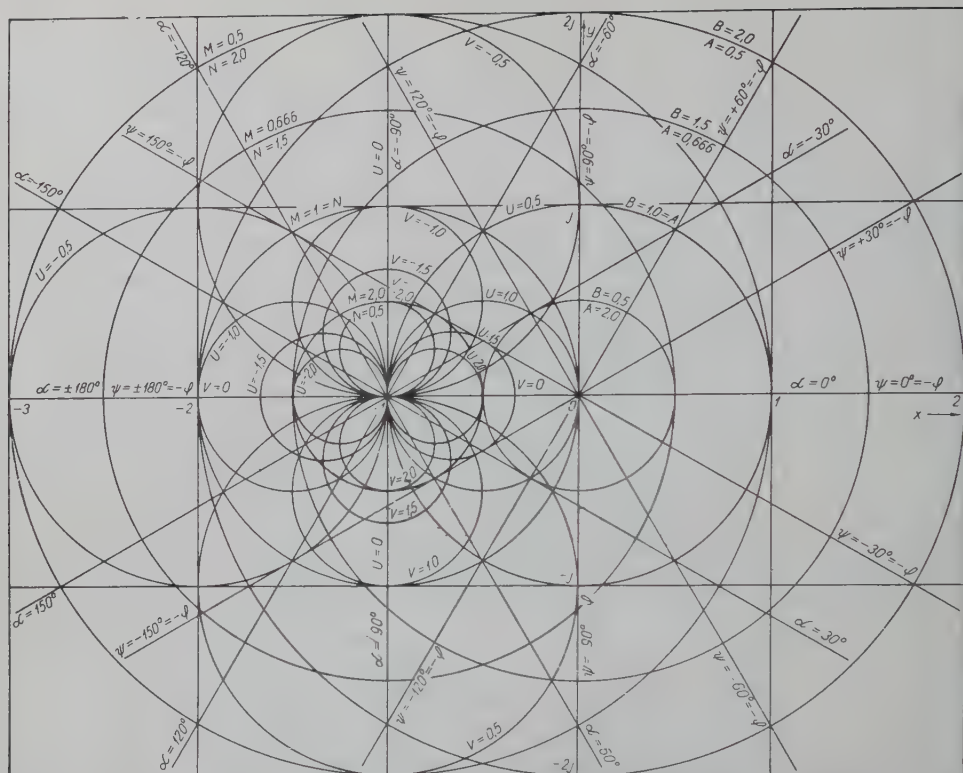


Fig. 6. Mapping of plane $M(s)$ onto the reference plane $B(s)$. Chart $(B, \psi, x, y) [M, a, U, V]$

$$(x+1)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{M}\right)^2 \quad (8c)$$

$$x+1 + \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = 0 \quad (8d)$$

This is the other most widespread method of representation. Among the incomplete charts these of the type $(x, y) [M, a]$ [3] and of the type $(B, \psi) [M, a]$ [2] used to be applied as a rule. Stability may be judged on the basis of the well-known inverse NYQUIST diagram [2, 3, 4]. Reading the gain margin and the phase margin is not difficult (by the aid of the circle $B = 1$ and of the straight line $\psi = 180^\circ$).

A special advantage of this method of representation is that the condition $\frac{1}{M} = \text{const.}$ determines concentric circles, while the condition $a = \text{const.}$ straight lines, consequently M and a may be well read. Evaluation of the peak M_p and of the bandwidth is easy. The division and multiplication, respectively,

prescribed by Eqs. (4a) and (4b), respectively, may simply be realized by the aid of circles $\frac{1}{M}$ and straights a . Nevertheless, determination of the co-ordinates U and V is somewhat complicated.

5.3. Mapping of the open-loop plane $A(s)$ onto the closed-loop plane $M(s)$

The mapping $M(s)$ [$A(s)$] is expressed by formula (9). The complete chart (M, a, U, V) [A, φ, X, Y] may be seen in Fig. 7, and for the plotting, following equations may be applied:

$$\left[(U-1) - \frac{1}{2(X+1)} \right]^2 + V^2 = \frac{1}{2(X+1)} \quad (9a)$$

$$(U-1)^2 + \left(V - \frac{1}{2Y} \right)^2 = \left(\frac{1}{2Y} \right)^2 \quad (9b)$$

$$\left(U - \frac{A^2}{A^2-1} \right)^2 + V^2 = \left(\frac{A}{A^2-1} \right)^2 \quad (9c)$$

$$\left(U - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(V + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \operatorname{tg} \varphi}} \right)^2 \quad (9d)$$

Adoption of the incomplete chart (M, a, U, V) [X, Y] belonging to this conformal mapping group has been suggested only recently [11]. The complete chart to be found in Fig. 7 appears here — to our knowledge — for the first time. For those who give preference to the polar form of $A(j\omega)$ over the canonical one, adoption of the incomplete chart (M, a, U, V) [A, φ] may be suggested instead of the chart proposed in [11].

It is important that the closed-loop response $M(j\omega)$ manifests itself directly, if the open-loop response $A(j\omega)$ is plotted onto the plane $M(s)$, whether by the aid of co-ordinates X, Y or A, φ .

This way of representation makes use of the plane $M(s)$ advantageously, consequently $M, a = \text{const.}$ determines the well-known polar co-ordinate system, while $U, V = \text{const.}$ the well-known Cartesian one. For establishing the time function, the data of the real and imaginary frequency response $U(\omega)$ and $V(\omega)$, respectively, may simply be read. Evaluation of the peak M_p and the bandwidth is also easy. The advantages are obvious, when adopting the formulae (4a) and (4b), as in the polar co-ordinate system the division and multiplication is simple.

The disadvantage of this method of representation is, however, that both the set of curves X, Y and the set of curves A, φ are condensed in certain places and are thin in other ones, consequently, plotting $M(j\omega)$ from the data of $A(j\omega)$ is not quite easy.

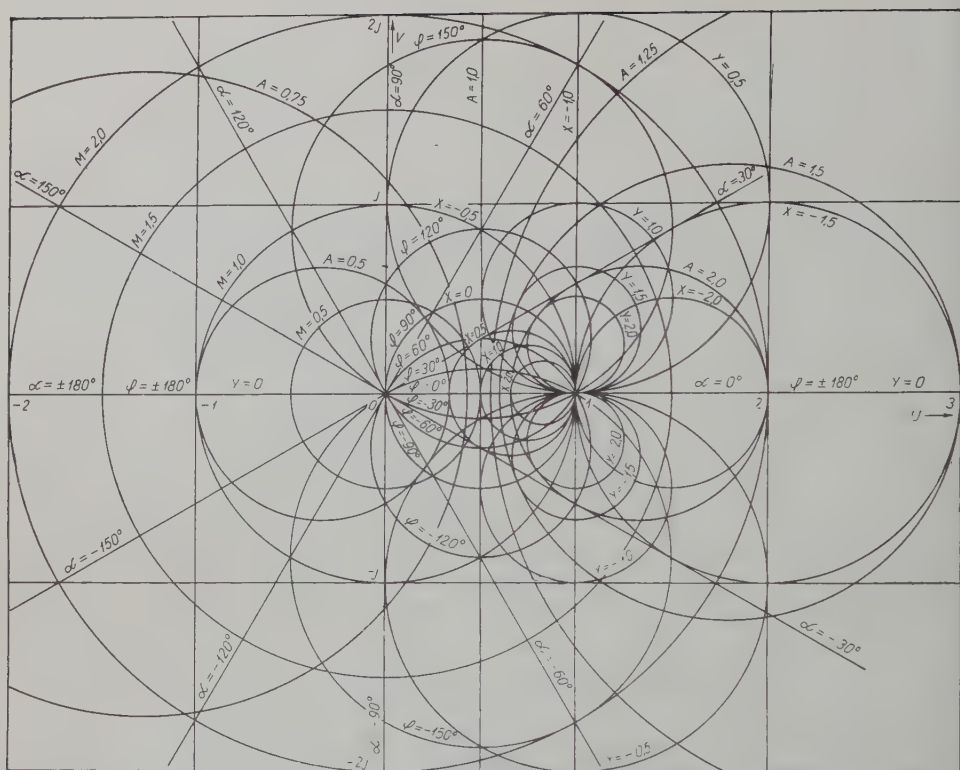


Fig. 7. Mapping of plane $A(s)$ onto the reference plane $M(s)$. Chart (M, a, U, V) [A, φ, X, Y]

The phase margin of the open-loop system may be determined on the basis of the unit circle, *i. e.* on the basis of the straight line $A = 1$. *E. g.* in the simple case, when $A(s)$ has no right-side poles and zeros, the closed-loop system is *stable*, when the curve $M(j\omega)$ cuts the straight line $A = 1$ in the *lower* $M(s)$ half-plane, and the system is *unstable*, when the curve cuts the straight line in the *upper* $M(s)$ half-plane. Namely, in the first case the phase margin is positive, being negative in the second one as $0 > \varphi > -180^\circ$ and $0 < \varphi < 180^\circ$, respectively (Fig. 7). The phase margin γ itself may simply be calculated by the aid of formula $\gamma = 180^\circ + \varphi$. The gain margin of the open-loop system may be determined from the intersection of curve $M(j\omega)$ and the abscissa axis, reading the gain margin by the aid of curves $X = \text{const.}$

As stability criterion the inverse LEONHARD, MIKHAILOV criterion [7, 8, 9, 10] may be adopted. If, for example, the transfer function $A(s)$ has no right-side poles or zeros, to render the closed-loop system stable, curve $M(j\omega)$ must sweep through as many quadrants in a negative, clockwise direction, as is prescribed by the difference of the highest powers of s in the polynomials in

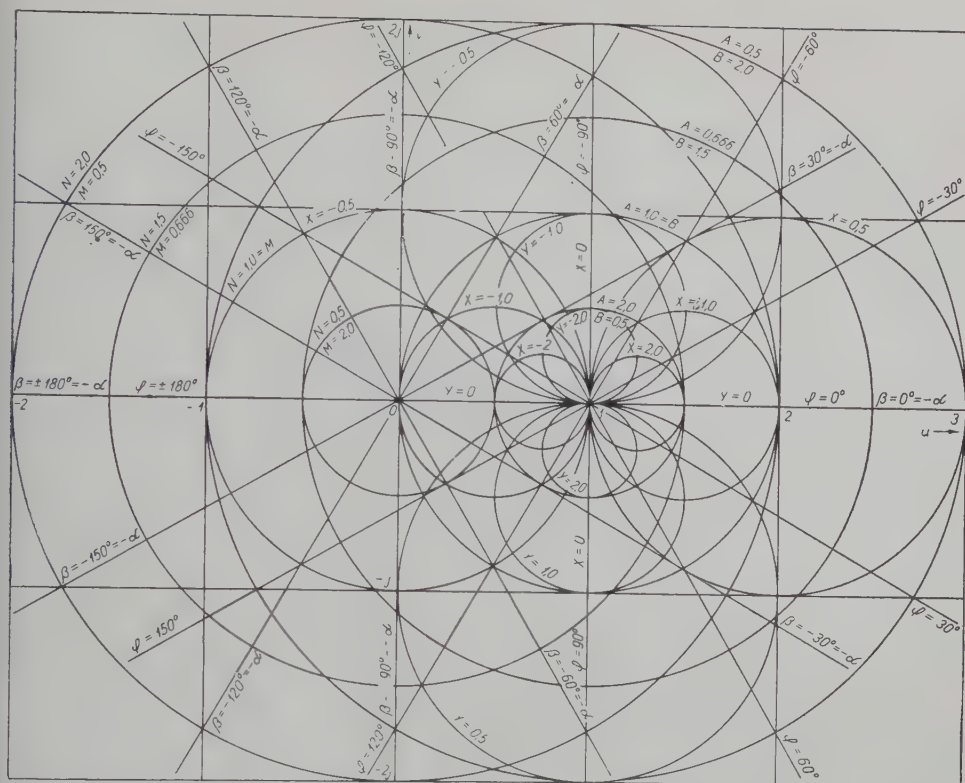


Fig. 8. Mapping of plane $A(s)$ onto the reference plane $N(s)$. Chart $(N, \beta, u, v) [A, \varphi, X, Y]$

the denominator and in the numerator of $M(s)$ (after removing the fractions in the denominator and in the numerator), while the frequency ω increases from 0 to $+\infty$.

5.4. Mapping of the open-loop plane $A(s)$ onto the inverse closed-loop plane $N(s)$

The mapping $N(s) [A(s)]$ is described by formula (10). For plotting the complete chart $(N, \beta, u, v) [A, \varphi, X, Y]$ (Fig. 8), the following equations serve

$$\left[(u-1) - \frac{1}{2X} \right]^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2X} \right)^2 \quad (10a)$$

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{2Y} \right)^2 = \left(\frac{1}{2Y} \right)^2 \quad (10b)$$

$$(u-1)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{A} \right)^2 \quad (10c)$$

$$u - 1 + \frac{v}{\operatorname{tg} \varphi} = 0. \quad (10d)$$

Transferring the open-loop response $A(j\omega)$ onto the $N(s)$ plane, either on the basis of the co-ordinates A, φ or X, Y , the inverse closed-loop response $N(j\omega)$ is obtained. The curve $N(j\omega)$ may relatively simply be plotted from the polar coordinates of $A(j\omega)$. Also the multiplication and division may easily be performed in the plane $N(s)$. The data of M can readily be obtained from the data of N as they are reciprocal ones. Opposite to these advantages, it is inconvenient, that now $U(\omega)$ and $V(\omega)$ cannot directly be read.

Determination of the open-loop phase margin using circle $A = 1$ is very simple, but to obtain the gain margin, the close circles $X = \text{const.}$ must be applied.

The stability criterion is similar to that of the previous case, nevertheless, curve $N(j\omega)$ must sweep through the quadrants in a positive, counter-clockwise direction, while the frequency ω increases from 0 to $+\infty$. (MIKHAILOV's and LEONHARD's criterion [7, 8, 9, 10].)

5.5. Mapping of the inverse open-loop plane $B(s)$ onto the closed-loop plane $M(s)$

As a following possibility the complete chart $(M, a, U, V) [B, \psi, x, y]$ (Fig. 9) belonging to the conformal mapping $M(s) [B(s)]$ will be examined. For the plotting, the following formulae may be adopted:

$$\left[U - \frac{1}{2(x+1)} \right]^2 + V^2 = \left[\frac{1}{2(x+1)} \right]^2 \quad (12a)$$

$$U^2 + \left(V + \frac{1}{2y} \right)^2 = \left(\frac{1}{2y} \right)^2 \quad (12b)$$

$$\left(U + \frac{1}{B^2 - 1} \right)^2 + V^2 = \left(\frac{B}{B^2 - 1} \right)^2 \quad (12c)$$

$$\left(U - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(V - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right)^2 \quad (12d)$$

The chart $(M, a, U, V) [B, \psi, x, y]$ was plotted only for the sake of completeness, but it will not be discussed in details, offering the same results, as chart $(M, a, U, V) [A, \varphi, X, Y]$ and being in no respect more advantageous, than it.

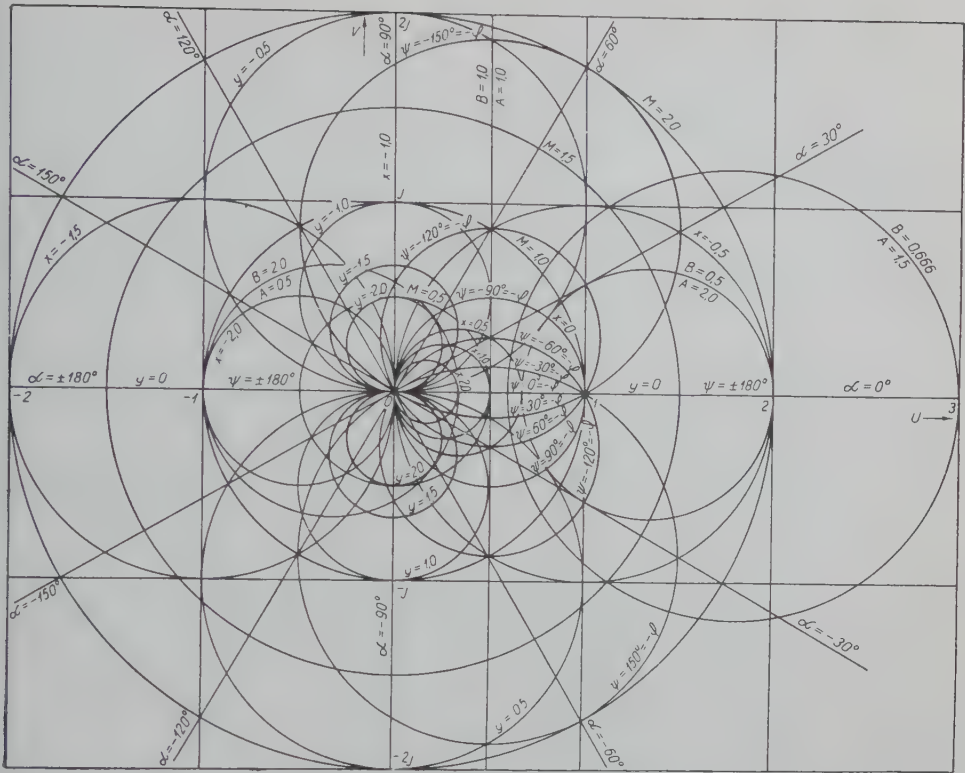


Fig. 9. Mapping of plane $B(s)$ onto the reference plane $M(s)$. Chart (M, α, U, V) $[B, \psi, x, y]$

5.6. Mapping of the inverse open-loop plane $B(s)$ onto the inverse closed-loop plane $M(s)$ and vice versa

The mappings $N(s)$ $[B(s)]$ and $B(s)$ $[N(s)]$ given by formulae (11) and (13), respectively, have exactly the same complete charts

$$(N, \beta, u, v) [B, \psi, x, y] \text{ and } (B, \psi, x, y) [N, \beta, u, v]$$

as a result (Fig. 10). For plotting it, the following formulae may be adopted:

$$u = x + 1 \quad (11a)$$

$$v = y \quad (11b)$$

$$(u - 1)^2 + v^2 = B^2 \quad (11c)$$

$$u - 1 - \frac{v}{\operatorname{tg} \psi} = 0 \quad (11d)$$

or

$$x = u - 1 \quad (13a)$$

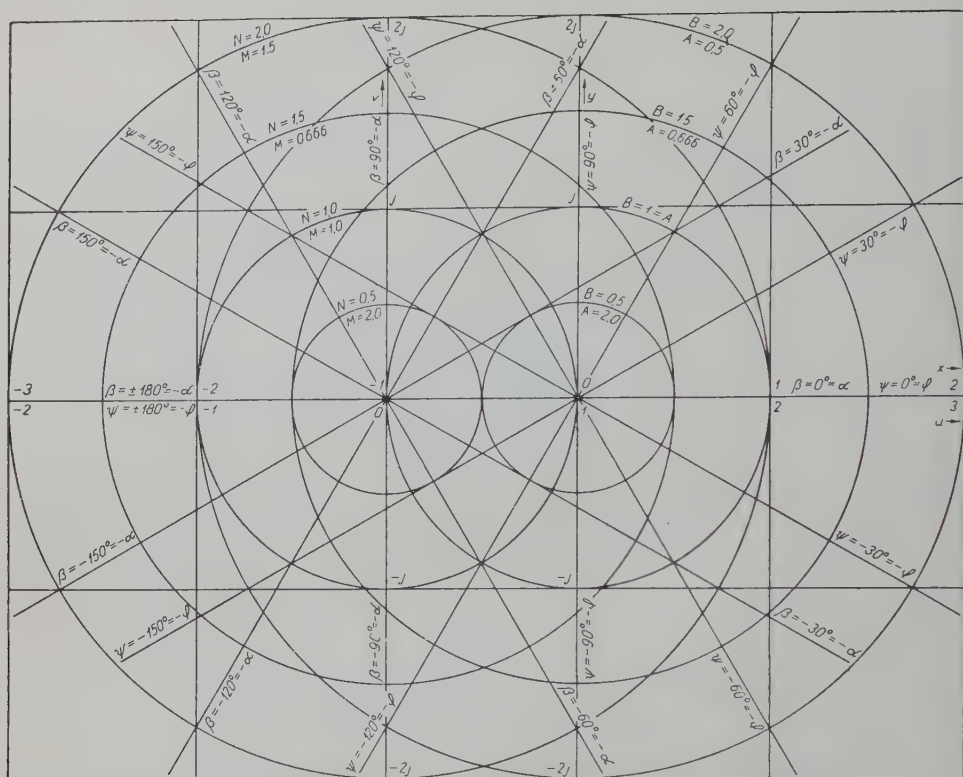


Fig. 10. Mutual mapping of planes $B(s)$ and $N(s)$. Charts (N, β, u, v) [B, ψ, x, y] and (B, ψ, x, y) [N, β, u, v]

$$y = v \quad (13b)$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = N^2 \quad (13c)$$

$$x + 1 - \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} = 0 \quad (13d)$$

This method of representation has great advantages: among the eight figuring co-ordinates six are determined by parallel equidistant straight lines while two of them by concentric circles. Reading any of the eight co-ordinates is consequently very simple and accurate. The multiplication division may be performed easily by the aid of the polar co-ordinates both in plane $N(s)$ and in plane $B(s)$.

The fact may be regarded as a disadvantage that for obtaining the time functions $U(\omega)$ and $V(\omega)$ cannot be read directly, nevertheless this limitation is not very important as $U(\omega)$ and $V(\omega)$ may be determined by simple formulae on the basis of the polar co-ordinates ($U = \frac{1}{N} \cos \beta$, $V = -\frac{1}{N} \sin \beta$).

It may be regarded as advantageous that a single curve provides simultaneously the inverse closed-loop frequency response $N(j\omega)$ [in the plane $N(s)$] and the inverse open-loop frequency response $B(j\omega)$ [in the plane $B(s)$].

As stability criterion in the plane $B(s)$ the inverse NYQUIST criterion, while in plane $N(s)$ the MIKHAILOV—LEONHARD criterion may be adopted. So from a didactical point of view this method of representation clearly shows the mutual relation between the above-mentioned stability criteria.

The phase margin, gain margin, the peak magnitude, as well as the bandwidth may be easily and accurately read, too.

5.7. Mapping of the inverse closed-loop plane $N(s)$ onto the open-loop plane $A(s)$

The mapping $A(s)$ [$N(s)$] given by Eq. (14) yields the following equations:

$$\left[X - \frac{1}{2(u-1)} \right]^2 + Y^2 = \left[\frac{1}{2(u-1)} \right]^2 \quad (14a)$$

$$X^2 + \left(Y + \frac{1}{2v} \right)^2 = \left(\frac{1}{2v} \right)^2 \quad (14b)$$

$$\left(X - \frac{1}{N^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \left(\frac{N}{N^2 - 1} \right)^2 \quad (14c)$$

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \beta} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \beta} \right)^2 \quad (14d)$$

These formulae figure, merely for the sake of completeness, and the chart (A, φ, X, X) [N, β, u, v] has not been plotted either, this being in any case less advantageous, than chart (A, φ, X, X) [M, a, U, V].

6. Conclusion

In the foregoing a systematical discussion was given concerning the possibilities of the eight conformal mappings, represented by equations (7) ... (14) for plotting the so-called complete charts.

As manifested by the detailed investigation and by Figs. 5 ... 10, besides the generally-used conformal mapping groups $A(s)$ [$M(s)$] and $B(s)$ [$M(s)$] and the recently-suggested incomplete chart (M, a, U, V) [X, Y], the charts furnished by the incomplete chart (M, a, U, V) [A, φ] as well as the conformal mapping group $N(s)$ [$A(s)$] — and perhaps $N(s)$ [$B(s)$] — may be well applied, moreover better, while the charts provided by the conformal mapping group $A(s)$ [$N(s)$] are disadvantageous, consequently their application must be avoided. Especially beneficial seem to be the conformal mappings $N(s)$ [$B(s)$] and

$B(s)$ [$N(s)$], as well as the corresponding charts (N, β, u, v) [B, ψ, x, y] and (B, ψ, x, y) [N, β, u, v], as the mappings in question mean, but a simple displacement, permitting to avoid the inverse formation and the inherent close, or thin circular co-ordinates.

Thus, by the systematic examination realized in the present paper, we succeeded in summarizing all possibilities of plotting the complex-plane charts, pointing out simultaneously the theoretical and practical limitations, the advantages and disadvantages. It is hoped, as concerns the problem investigated, this paper contributes to broadening the horizon of the engineers and experts dealing with control engineering.

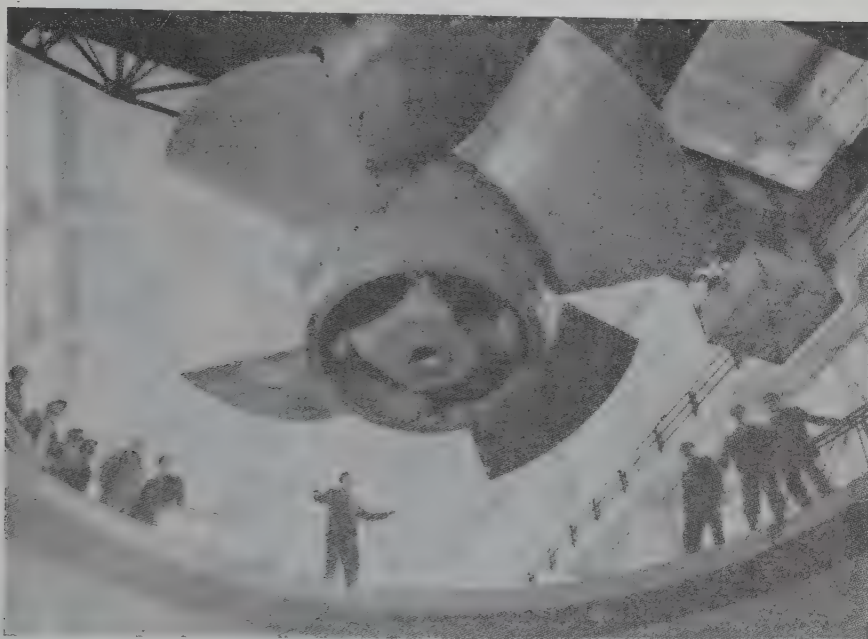
Summary

This paper of summarizing and systemizing character sums up and discusses — in our knowledge for the first time — all the possibilities of plotting the complex-plane charts, forming a relation between the closed-loop and open-loop frequency responses. Though theoretically a high number of complex-plane charts differing from each other may be plotted, they all belong to eight conformal mapping groups. Latter provide five practicable methods of representation. By the aid of these charts it can be decided on the basis of the magnitude-phase characteristics, if the closed-loop system stable is and, on the other hand, the design specifications (bandwidth, peak M_p , phase margin, gain margin) may simply be estimated and at the same time the real and imaginary closed-loop frequency response data permitting the determination of the time functions may be simply determined.

References

1. JAMES, H. M.—NICHOLS, N. B.—PHILLIPS, R. S.: *Theory of Servomechanisms*. McGraw-Hill Book Co. Ltd., New York, London, Toronto, 1947.
2. BROWN, G. S.—CAMPBELL, D. P.: *Principles of Servomechanisms*. John Wiley & Sons, Inc., New York — Chapman & Hall, Ltd., London, 1948.
3. CHESTNUT, H.—MAYER, R. W.: *Servomechanisms and Regulating System Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York — Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.
4. GRABBE, E. M.—RAMO, S.—WOOLDRIDGE, D. E.: *Handbook of Automation, Computation and Control*. Volume I. *Control Fundamentals*. John Wiley & Sons, Inc., New York — Chapman & Hall, Ltd., London, 1958.
5. BODE, H. W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, Princeton, 1945.
6. NYQUIST, H.: *Regeneration Theory*. *Bell System Techn. Journ.*, **11**, 126—147 (1932).
7. Михайлов, А. В.: Метод гармонического анализа в теории регулирования. *Автоматика и Телемеханика*, Москва, 1938. № 3.
8. Михайлов, А. В.: Теория устойчивости линейных цепей обратной связи с сосредоточенными постоянными. *Журнал Технической Физики*, Москва, 1939, № 1.
9. LEONHARD, A.: Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. *Archiv für Elektrotechnik*, **33**, 17—28, (1944).
- 10a. Мсеров, М. В.: *Основы автоматического регулирования электрических машин*. Госэнергоиздат, Москва, 1952.
- 10b. MEJEROW, M. W.: *Grundlagen der selbsttätigen Regelung elektrischer Maschinen*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1954.
11. CHEN, C. F.—SHEN, D. W.: A New Chart Relating Open-Loop and Closed-Loop Frequency Responses of Linear Control Systems. *AIEE Transactions*, **78**, 252—255, (1959). Part II. *Applications and Industry*.
- 12a. Солодовников, В. В.: *Основы автоматического регулирования*. Машгиз, Москва, 1959.
- 12b. SOLODOVNIKOW, W. W.: *Grundlagen der selbsttätigen Regelung*. Verlag Technik, Berlin, 1959.

Prof. F. CSÁKI, Budapest, XI. Egri J. u. 18. V., Hungary



HYDROELECTRIC
POWER PLANTS

WATERTURBINES
ALTERNATORS
SWITCHGEARS

MANUFACTURERS
GANZ & CO. BUDAPEST



HUNGARIAN TRADING COMPANY FOR FACTORY EQUIPMENT
BUDAPEST P. O. B. 51.



Telephone Apparatus · CB and LB Switchboards · Automatic Telephone Exchanges · Repeater Station Equipments · Microwave Multiplex Equipments · Shortwave and Medium-wave Broadcasting Transmitters · Mobile and Portable Transceiver · Transmission Measuring Instruments · High Frequency Generators

BUDAVOX

Budapest Telecommunication Company

BUDAPEST VII., TANÁCS KÖRÜT 3/a

Telephone : 426-549

Letters: Budapest 62 P. O. B. 267 · Cables: Budavox Budapest · Telex: 672

A kiadásért felel az Akadémia Kiadói igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1960. IX. 28. — Terjedelem: 10,75 (A/5) ív, 54 ábra

1960.52156 — Akadémiai Nyomda — Felelős vezető: Bernát György

A Budapesti Műszaki Egyetem Periodica Polytechnica címen idegen nyelvű tudományos folyóiratot indított. A folyóirat három sorozatban — vegyészeti, villamossági, valamint gépész- és általános mérnöki sorozatban — jelenik meg, évente négyszer, sorozatonként egy-egy kötetben. Az egyes kötetek terjedelme 14—18 ív.

A Periodica Polytechnicában megjelenő tanulmányok szerzői az Egyetem tanári karából és tudományos dolgozóiból kerülnek ki. Főszerkesztő Dr. Csűrös Zoltán egyetemi tanár, akadémikus.

A folyóirat előfizetési ára sorozatonként és kötetenként 60,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Budapest 62, Postafiók 440. NB. egyszámlaszám : 05-915-111-46), a külföld számára pedig a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. 62, Postafiók 149. NB. egyszámlaszám : 43-790-057-181), illetve a vállalat külföldi képviselőinél és bizományosainál.

INDEX

F. CSÁKI: Quadratic Approximation of Admittance Diagrams for the Theoretical Examination of Turbo-Generators in Asynchronous Operation	259
L. BAJZA: Die Strom-, Momenten- und Leistungsverhältnisse einphasiger Winkelübertragungssysteme	275
G. ALMÁSSY—I. FRIGYES: New Microwave Noise Generator for the 2000 MC/s Band	293
G. FODOR: The Characteristics of Homogeneous Neutron Amplifiers	305
T. FREY: Über die Feldstärke einer Flächenladungsschicht	327
I. HARSÁNYI: Über die Proportionen der ingenieur-techni- schen Arbeit	343
F. CSÁKI: Complex-Plane Charts for Obtaining Closed-Loop Frequency Responses in Linear Control Systems	361